Zdzisław Pogoda
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
Kraków

STANISŁAW ZAREMBA I KRYSTALOGRAFIA*

Stanisław Zaremba kojarzony jest przede wszystkim z równaniami różniczkowymi i ich zastosowaniami. Gdy jednak przegląda się spis jego publikacji, to ukazuje się nam oblicze matematyka o bardzo różnorodnych zainteresowaniach. Wiele z tych zainteresowań dotyczy zastosowań matematyki szczególnie w fizyce. Wydaje się to naturalne, bo teorie równań różniczkowych zostały stworzone niejako na zamówienie zastosowań w różnych dziedzinach.

Z pewnością zaskakujące są zainteresowania Zaremby dotyczące krystalografii. Nawet osoby mające mgliste pojęcie o tej dziedzinie, nie będą jej kojarzyły z równaniami różniczkowymi, lecz raczej z geometrią – przecież krystalografia bada kształty kryształów. Takie jest powszechne przekonanie.

Specjaliści odróżniają mineralogię od krystalografii. Mineralogia związana jest ściśle z geologią i bada minerały, czyli obiekty występujące w przyrodzie. Można powiedzieć, że mineralogia bada związki chemiczne (lub pierwiastki), których struktura została uformowana w wyniku procesów geologicznych. Natomiast krystalografia, wywodząca się z mineralogii zajmuje się badaniem struktury kryształów. Obiekty uznane za minerały mają strukturę krystaliczną, natomiast kryształy nie muszą być minerałami, nie muszą mieć pochodzenia geologicznego, jak choćby płatki śniegu.

Termin κρύσταλλος (*krystallos*) oznacza lód. Określenie zostało przeniesione na kwarc a dokładniej jego odmianę – kryształ górski. O ile mineralogia ma tradycje sięgające starożytności, to krystalografia jest stosunkowo młoda. Za pierwszą rozprawę zawierającą elementy krystalografii często[1] uważa się piękny esej napisany przez Johannesa Keplera *Strena seu de nive sexangula*[2], co można przetłumaczyć *Noworoczny Podarek albo o sześciokątnych płatkach śniegu.* Krótka rozprawa, pokazująca niezwykłą

*Autor pragnie podziękować pani dr Danucie Ciesielskiej za bardzo cenne informacje i wskazówki.

erudycję autora, zawiera między innymi próbę wyjaśnienia kształtu płatków śniegowych odwołując się do ich wewnętrznej budowy. Wcześniej nikt nie próbował takiego podejścia. We wspomnianej rozprawie Kepler sformułował także znaną hipotezę o upakowaniu kul, rozstrzygniętą dopiero pod koniec XX wieku. Robert Hooke także przypuszczał, że kryształ jest skupiskiem cząstek kulistych ułożonych gęsto i w sposób prawidłowy. Nieco później Christiaan Huygens rozwinął pomysły poprzedników. Uważał między innymi, że płaszczyzny łupliwości są naturalnymi liniami podziału pomiędzy płaskimi warstwami cząsteczek. Niemal w każdym podręczniku krystalografii można znaleźć nazwisko: René Just Haüy. Ten francuski duchowny, autor między innymi *Traité de Mineralogie* oraz *Traité de Cristallographie* sprecyzował ideę prawidłowego skupienia cząsteczek. Cząsteczkową budowę kryształów potwierdzono eksperymentalnie, gdy rozwinięto nowe techniki badawcze. Sprawdziło się przypuszczenie, że przyczyną regularnej postaci zewnętrznej kryształów jest regularność geometryczna budowy wewnętrznej czyli regularność sieci przestrzennej. Sieć jest pewną umowną strukturą zbudowaną z prostych, w węzłach których umieszczone są atomy, jony lub cząstki.

W czasach działalności Zaremby, a dokładniej w okresie międzywojennym, wyróżniano krystalografię geometryczną, fizyczną i chemiczną (krystalochemię). Gdy cząsteczkowa budowa ciał została lepiej poznana wyróżniono także krystalografię strukturalną ściśle związaną z krystalografią geometryczną. Zaremba zajmował się głównie krystalografią geometryczną wykorzystującą do badania kryształów geometrię euklidesową, ale także krystalografią strukturalną, gdyż do badania struktury wewnętrznej kryształów stosował również teorię grup. Była to już teoria bardzo dobrze rozwinięta i stosowano ją w różnych działach matematyki. W szczególności grupy izometrii wykorzystywano do opisu struktury wewnętrznej kryształów.

Stanisław Zaremba jest autorem dwóch prac poświęconych krystalografii. Jedna to długi, liczący 473 strony, artykuł *Sur les fondements de la cristallographie géométrique* (*O podstawach krystalografii geometrycznej*)[3] napisany wspólnie ze Stefanem Kreutzem i opublikowany jako numer dodatkowy w „Bulletin de l'Académie de Sciences de Cracovie".

Rys.1. Stefan Kreutz

Druga praca jest artykułem w opublikowanym w *Poradniku dla samouków* jako jeden z tekstów w tomie poświęconemu krystalografii noszący tytuł *Rola przekształceń punktowych przestrzeni w krystalografii*[4]

ROLA PRZEKSZTAŁCEŃ PUNKTOWYCH PRZESTRZENI
W KRYSTALOGRAFJI . . . . . opr. STANISŁAW ZAREMBA.

§ 1. Cel artykułu 177
§ 2. Przekształcenia punktowe, występujące w krystalografji; elementy symetrji 178
§ 3. Przekształcenia izometryczne wielościanów w siebie samych 183
§ 4. Grupy wielościenne 189
§ 5. Grupy wielościenne w krystalografji 190
§ 6. Ugrupowania klas krystalograficznych w systemy 192
§ 7. Geometryczne własności substancyj krystalicznych i grupy Schoenfliesa i Jordana 195

Rys. 2. Spis treści artykułu *Rola przekształceń punktowych przestrzeni w krystalografii*

Kilka zdań na temat krystalografii możemy jeszcze znaleźć w tekście *Le Caractere propre et la Portée de la Physique*[5] w czasopiśmie Scientia z 1920 roku .

Przejdźmy najpierw do tekstu *Rola przekształceń punktowych przestrzeni w krystalografii*. Choć artykuł ma charakter popularny, to napisany jest bardzo precyzyjnie i może służyć za matematyczne wprowadzenie do krystalografii geometrycznej i jest to pierwszy tekst w języku polskim tego typu. Poprzedzony jest napisanym równie przejrzyście artykułem *Krystalografja*[6] Stefana Kreutza[7] kierownika Katedry Mineralogii i Krystalografii w Uniwersytecie Jagiellońskim w latach 1919-1939.

Zaremba stawia sobie za cel poinformowanie czytelnika o tym, jakie narzędzia matematyczne wykorzystywane są w krystalografii geometrycznej. Zaznacza, że literatura na ten temat pozostawia wiele do życzenia pod względem ścisłości. Oto jego słowa:

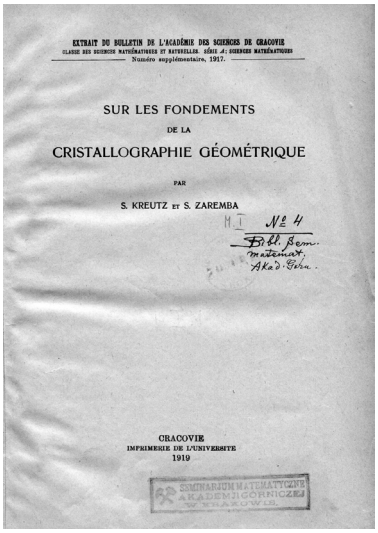
> Należy stwierdzić z ubolewaniem, że ze stanowiska matematyczno-logicznego żaden z podręczników krystalografii nie jest (o ile mi wiadomo) zadowalający, a większość ich szpecą ciężkie błędy geometryczne. Chęć przyczynienia się do poprawy tych stosunków naukowych była powodem napisania niniejszego artykułu.

Artykuł podzielony jest na siedem paragrafów-rozdziałów (por. Rys.2). W pierwszym, przedstawione są cele, jakie stawia sobie Autor. Drugi zawiera podstawowe pojęcia z teorii izometrii. Dla przykładu zacytujmy definicję przekształcenia izometrycznego zaproponowaną przez Zarembę z zachowaniem pisowni i terminologii:

> Orzeczenie, że jakieś przekształcenie P jest przekształceniem izometrycznem, wyraża, że odległość AB każdej pary dowolnie wybranych punktów A i B przestrzeni równa się

zawsze odległości A'B' punktów A' i B', w które przekształcenie P przekształca odpowiednio punkty A i B.

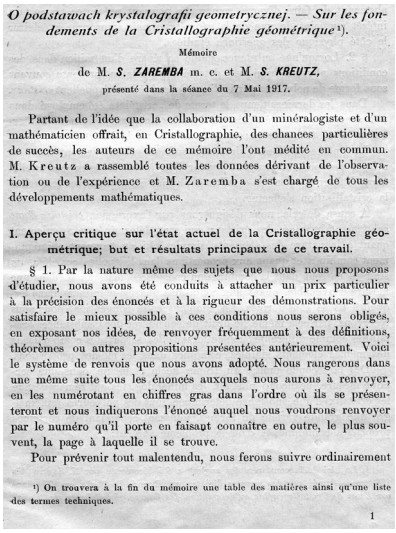
Opisane są podstawowe przykłady izometrii w przestrzeni odgrywające istotną rolę w krystalografii. Przedstawiona jest też reprezentacja analityczna przekształceń. Terminologia jest zbliżona do współczesnej, choć różni się w szczegółach. Na przykład zamiast „kąt obrotu" używany jest termin „amplituda obrotu". Kolejny rozdział poświęcony jest izometriom własnym wielościanów, które nazywane są również symetriami wielościanu. Terminy te nie pojawiają się w tekście, ale pojęcie grupy symetrii wielościanu już występuje. Rozdział czwarty zawiera informacje o grupach wielościennych oraz ich klasyfikacji z odesłaniem do pracy Kreutza i Zaremby[8]. Kolejne trzy rozdziały poświęcone są zastosowaniom rozwiniętej wcześniej teorii w krystalografii. W szczególności omawiane są różne zagadnienia klasyfikacyjne dotyczące grup Bravais'a, podziału klas krystalograficznych na systemy i własności grup nazwanych przez Zarembę grupami Schoenfliesa[9] i Jordana, znanych we współczesnej literaturze jako grupy Fedorova[10] albo przestrzenne grupy krystalograficzne. Fedorov[11] i Schönflies niemal równocześnie dokonali klasyfikacji grup krystalograficznych. Udowodnili, że istnieje 230 typów takich grup, a pomijając chiralność 219. Nieco później podobnej klasyfikacji dokonał W. Barlow[12]. Zaremba konsekwentnie przytacza nazwisko Camille'a Jordana jako autora fundamentalnej rozprawy z teorii grup ruchów[13] i traktatu poświęconego grupom podstawień (permutacji) i teorii Galois[14]. Jordana można uważać, i tak postępuje Zaremba, za prekursora badań nad grupami przestrzennymi (punktowymi). Artykuły Kreutza i Zaremby w *Poradniku dla samouków* można traktować jak skrót opublikowanej pięć lat wcześniej w Bulletin de l'Académie de Sciences de Cracovie monumentalnej rozprawy o podstawach krystalografii geometrycznej[15].



EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE A: SCIENCES MATHÉMATIQUES
Numéro supplémentaire, 1917.

SUR LES FONDEMENTS
DE LA
CRISTALLOGRAPHIE GÉOMÉTRIQUE
PAR
S. KREUTZ ET S. ZAREMBA

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1919



O podstawach krystalografii geometrycznej. — Sur les fondements de la Cristallographie géométrique[1]).

Mémoire
de M. **S. ZAREMBA** m. c. et M. **S. KREUTZ**,
présenté dans la séance du 7 Mai 1917.

Partant de l'idée que la collaboration d'un minéralogiste et d'un mathématicien offrait, en Cristallographie, des chances particulières de succès, les auteurs de ce mémoire l'ont médité en commun. M. Kreutz a rassemblé toutes les données dérivant de l'observation ou de l'expérience et M. Zaremba s'est chargé de tous les développements mathématiques.

I. Aperçu critique sur l'état actuel de la Cristallographie géométrique; but et résultats principaux de ce travail.

§ 1. Par la nature même des sujets que nous nous proposons d'étudier, nous avons été conduits à attacher un prix particulier à la précision des énoncés et à la rigueur des démonstrations. Pour satisfaire le mieux possible à ces conditions nous serons obligés, en exposant nos idées, de renvoyer fréquemment à des définitions, théorèmes ou autres propositions présentées antérieurement. Voici le système de renvois que nous avons adopté. Nous rangerons dans une même suite tous les énoncés auxquels nous aurons à renvoyer, en les numérotant en chiffres gras dans l'ordre où ils se présenteront et nous indiquerons l'énoncé auquel nous voudrons renvoyer par le numéro qu'il porte en faisant connaître en outre, le plus souvent, la page à laquelle il se trouve.

Pour prévenir tout malentendu, nous ferons suivre ordinairement

[1]) On trouvera à la fin du mémoire une table des matières ainsi qu'une liste des termes techniques.

1

Rys. 3. Strona tytułowa i pierwsza strona pracy *O podstawach krystalografii geometrycznej*

Artykuł liczy 473 strony i zawiera chyba najbardziej bogaty i precyzyjny materiał dotyczący krystalografii geometrycznej, jaki został napisany przez Polaków do czasów wojny w 1939 roku[16]. Praca podzielona jest na osiem rozdziałów. Na końcu znajduje się obszerne uzupełnienie zawierające klasyfikację grup Bravais'a i grup krystalograficznych.

W rozdziale pierwszym Autorzy formułują wszystkie tezy, które zamierzają przeanalizować lub udowodnić dalej. Tam też podane są najważniejsze definicje i pojęcia niezbędne do sformułowania tez. Między innymi przedstawione są prawa i hipotezy: prawo wymiernych wskaźników, prawo pasowe, prawo wymiernych stosunków anharmonicznych, prawo wymiernych stosunków odcinków, hipoteza kolineacyjna i hipoteza sieci przestrzennej[17]. Zapowiedziano omówienie wzajemnych zależności pomiędzy wymienionymi prawami. Rozdział drugi zawiera najważniejsze fakty z teorii grup przekształceń. W kolejnych rozdziałach analizowane są poszczególne prawa i hipotezy, zostaje im nadana ścisła matematyczna forma w języku izometrii własnych figur i grup przekształceń. Zjawisko symetrii w kryształach zostaje przedstawione jako ściśle związane z wymienionymi prawami zasadniczymi. W oparciu o nie, wykorzystując między innymi metody geometrii analitycznej i teorii przekształceń, zostały wyprowadzone 32 klasy grup symetrii posługując się wyłącznie środkiem symetrii (symetrią środkową), osiami obrotu (obrotami wokół osi) i składaniem przekształceń. Metody konstrukcji opisane przez Kreutza i Zarembę nazywane bywają czasem notacją Kreutza-Zaremby[18].

Zagadnienie polegające na wyznaczeniu wszystkich klas grup wielościennych, czyli grup izometrii własnych wielościanów, autorzy sprowadzają do dwóch problemów:

– wyznaczyć wszystkie klasy grup wielościennych obrotów nazywanych grupami rotacyjnymi;

– wyznaczyć wszystkie grupy wielościenne nierotacyjne.

Rozwiązanie pierwszego problemu Autorzy przytaczają za Jordanem zaznaczając, że jest to jedyne rozwiązanie wolne od błędów i nieścisłości.

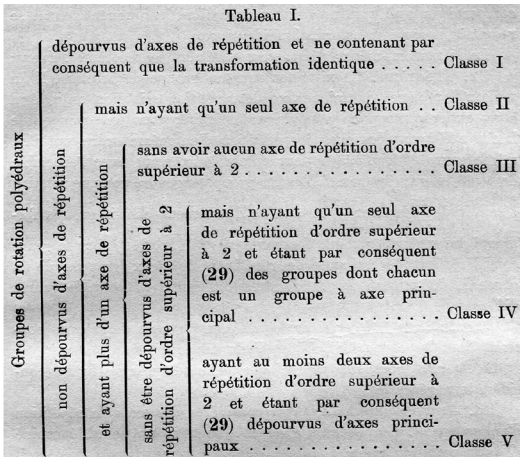


Tableau I.

Groupes de rotation polyédraux	dépourvus d'axes de répétition et ne contenant par conséquent que la transformation identique				Classe I
	non dépourvus d'axes de répétition	mais n'ayant qu'un seul axe de répétition . .			Classe II
		et ayant plus d'un axe de répétition	sans avoir aucun axe de répétition d'ordre supérieur à 2		Classe III
			sans être dépourvus d'axes de répétition d'ordre supérieur à 2	mais n'ayant qu'un seul axe de répétition d'ordre supérieur à 2 et étant par conséquent (29) des groupes dont chacun est un groupe à axe principal	Classe IV
				ayant au moins deux axes de répétition d'ordre supérieur à 2 et étant par conséquent (29) dépourvus d'axes principaux	Classe V

Rys. 4. Podział grup rotacyjnych wielościennych

Rozwiązanie drugiego problemu jest oryginalne i wykorzystuje właśnie złożenia obrotów i symetrii środkowej. Autorzy są przekonani, że jest to najprostsze znane ścisłe rozwiązanie. Sformułowali także precyzyjnie zasadę podziału ogółu klas krystalograficznych na systemy; wyróżniają 6 systemów powołując się na wyniki eksperymentalne

Tableau X.

Numéro d'ordre du système	Noms usuels des systèmes cristallographiques	Catégories des *groupes de Bravais* (tableau VI) formant chaque système	Groupe holoédrique (**275**, p. 213) de chaque système
I	Système triclinique	(1)	C
II	Système clinorhombique	(2)	$CL_{\bullet}^{2}$
III	Système terbinaire ou orthorhombique	(3)	$CL_{\bullet}^{2}L_{x}^{2}$
IV	Système quadratique	(4) et (5)	$CL_{\bullet}^{4}L_{x}^{2}$
V	Système hexagonal	(6), (7), (8) et (9)	$CL_{\bullet}^{6}L_{x}^{2}$
VI	Système terquaternaire ou cubique	(10) et (11)	$CL_{\bullet}^{4}L_{x}^{4}$

Rys. 5. Sześć systemów krystalograficznych

W pracy przedstawiono wiele twierdzeń szczegółowych i technicznych trików świadczących o znajomości zagadnień z geometrii i teorii grup. Z opisów i cytowań wynika również, że Autorzy doskonale znają problemy krystalografii geometrycznej. W przypadku Stefana Kreutza jest dość naturalne – był on bowiem znakomitym krystalografem, autorem wielu cennych publikacji[19]. Publikacja z dziedziny krystalografii ukazuje nam oblicze Stanisława Zaremby jako matematyka wszechstronnego, interesującego się rozmaitymi problemami z różnych działów matematyki i jej zastosowań; nieprawdziwy jest stereotypowy obraz matematyka zapatrzonego w klasyczną matematykę sprowadzaną głównie do równań różniczkowych.

Przypisy

[1] *Dzieje krystalografii polskiej* (red. Z. Kosturkiewicz). Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.

[2] J. Kepler: *Noworoczny podarek albo o sześciokątnych płatkach śniegu*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2006.

[3] S. Kreutz, S. Zaremba: *Sur les fondements dla la cristallographie géométrique.* „Extrait du Bulletin de l'Académie de Sciences de Cracovie", Numéro supplémentaire, Cracovie 1919. (Por. rys. 3).

[4] S. Zaremba: *Rola przekształceń punktowych przestrzeni w krystalografii*. [w:] *Poradnik dla samouków*. t. IV, s. 177–195. Wydawnictwo A.Heficha i St, Michalskiego, Warszawa 1924.

[5] S. Zaremba: *Le Caractere propre et la Portée de la Physique*. „Scientia" 28, 1920

[6] S. Kreutz: *Krystalografja*. [w:] *Poradnik dla samouków*. t. IV, s. 1–176. Wydawnictwo A.Heficha i St, Michalskiego, Warszawa 1924.

[7] A. Gaweł: *Stefan Kreutz 1883–1941*. „Annales Societatis Geologorum Poloniae", Vol 19, No 1 1949

[8] Zob. przyp. 3.

[9] A.M. Schönflies: *Theorie der Kristallstruktur*. „Gebr. Bornträger", 1891. Berlin

10 E.S. Fedorov E. S.. *Symmetry of Regular Systems of Figures*. „Zap. Mineral. Obch.". 28, s. 1–146, 1891.

[11] W polskojęzycznej literaturze przedmiotu, szczególnie starszej, można znaleźć transkrypcję: Jewgraf Stiepanowicz Fiodorow. W oryginale: Евграф Степа́нович Фёдоров, co można także zapisać – Yevgraf Stepanovich Fyodorov. Jednak w artykułach angielskojęzycznych najczęściej występuje Evgraf Stepanovich Fedorov.

[12] W. Barlow: *Über die geometrischen Eigenschaften starrer Strukturen und ihre Anwendung auf Kristalle*. „Z. Kristallogr." 23, s. 1–63, 1894

[13] C. Jordan: *Mémoire sur les groupes de mouvements*. „Annali di Matematica di F. Brioschi e L. Cremona", Ser. II, t. 2. Milano, 1868, s. 167–215, 322–345.

[14] C. Jordan: *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Gauthier Villars, Paris 1870.

[15] Zob. przyp.3.

[16] Literatura poświęcona krystalografii do roku 1924 została wyczerpująco omówiona we wspomnianym artykule Kreutza. Zob. przyp. 6.

[17] Zob.przyp. 3.

[18] W krystalografii geometrycznej izometrie opisywane są za pomocą ich zbiorów punktów stałych. Mówiąc oś obrotu mamy na myśli obrót wokół tej osi, podobnie środek symetrii i płaszczyzna symetrii mogą oznaczać symetrię środkową i odbicie względem płaszczyzny (symetrię płaszczyznową).

[19] Zob. przyp. 7.

Z. Pogoda

STANISŁAW ZAREMBA AND CRYSTALLOGRAPHY

In the paper we present a little-known episode from the research activities of Stanisław Zaremba in the field of crystallography. We discuss two publications: one of over 470 pages, entitled *Sur les fondements de la cristallographie géométrique* written together with Stefan Kreutz and published in „Bulletin de l'Académie de Sciences de Cracovie" and *Rola przekształceń punktowych przestrzeni w krystalografii* included in *Poradnik dla samouków.*