

# Bębny izospektralne

IM UJ, 15 I 2018

Krzysztof Maślanka  
IHN PAN, Kraków

## Streszczenie

Od czasów Galileusza wiemy, że „matematyka jest językiem fizyki”. Czasem jednak fizyka potrafi się „zrewanżować” matematyce. Tytułowy, niezbyt atrakcyjnie brzmiący termin dotyczy pewnego równania falowego ze szczególnymi warunkami brzegowymi, ale jest tylko pretekstem do pokazania, że fizyka może być inspirująca dla matematyki, zgodnie ze znanym stwierdzeniem Poincaré’go z jego książki *La Valeur de la Science*:

La physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières. Elle nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements<sup>1</sup>.

(Fizyka daje nam nie tylko możliwość rozwiązywania problemów. Pomaga nam, na dwa sposoby, znaleźć drogę. [Po pierwsze] sprawia, że „czujemy” rozwiązanie. Ponadto sugeruje nam sposób rozumowania.)

We wspomnianej książce Poincaré podaje też pewną praktyczną wskazówkę metodologiczną (podejrzewam, że nieczęsto zalecaną przez matematyków – przynajmniej oficjalnie):

Deviner avant de démontrer! Ai-je besoin de rappeler que c’est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes?

(Odgadnij [rozwiązanie] zanim udowodnisz! Czy trzeba przypominać, że w taki właśnie sposób dokonano wszystkich ważnych odkryć?)

\*

W roku 1966 Marek Kac (1914-1984) postawił pytanie: „Czy można usłyszeć kształt bębna?” (*Can One Hear the Shape of a Drum?*<sup>2</sup>). Na pierwszy rzut oka wydaje się ono absurdalne: przecież słyszymy dźwięki, a nie kształty! Trzeba zatem doprecyzować: chodzi o rozkład

---

<sup>1</sup> Henri Poincaré *La Valeur de la Science* (1919, Flammarion, *Bibliothèque de philosophie scientifique*), p. 168.

<sup>2</sup> *The American Mathematical Monthly*, Vol. 73, No. 4, pp. 1-23. – Za artykuł ten Kac otrzymał dwie prestiżowe nagrody: 1968 r. – Chauvenet Prize, 1967 r. – Lester R. Ford Award. Obie te nagrody są przyznawane za „expository excellence”.

kolejnych składowych harmonicznych w widmie dźwięku, a to ucho może jakościowo, ale skutecznie zanalizować. W szczególności rozpoznajemy bez trudu, że ten sam dźwięk, np. tzw. „a razkreślne”, jak mówią muzycy, wykonane na skrzypcach i na fortepianie brzmi inaczej.

Jak to czasem w nauce bywa, sam problem postawił ktoś inny: 10 lat wcześniej Salomon Bochner (1899-1982; urodził się w Podgórzu, w Krakowie), a rozwiązanie zasugerował pochodzący z Łotwy Lipman „Lipa” Bers (1914-1993). (W swym artykule Kac zresztą uczciwie o tym wspomina.) Gdyby pogrzebać jeszcze staranniej, to źródeł tego problemu można by się doszukać u Hermanna Weyla (1895-1955). Słowem – ewidentny przykład prawa Arnolda-Berry’ego.

Jednak zagadnienie to tradycyjnie związane jest z nazwiskiem Marka Kaca. Zapewne dlatego, że zamiast mówić, na przykład, o „wartościach własnych  $\lambda$  problemu Dirichleta dla laplasjanu drgającej membrany o kształcie  $\Omega$  itd.” – co wymaga rozwiązania równania różniczkowego:

$$\Delta u(x, y) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = \lambda u(x, y)$$

z warunkiem brzegowym:

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$$

– sformułował zgrabne pytanie w języku zrozumiałym dla laików.

Sam Kac podejrzewał, że odpowiedź na jego pytanie może być negatywna. Inaczej mówiąc: istnieją dwa nieprzystające obszary o identycznych widmach wartości własnych. Pewną sugestią była obserwacja Johna Milnora (oparta na twierdzeniu Ernsta Witta), że istnieje para 16-towymiarowych torusów, które mają różne kształty, lecz dokładnie te same wartości własne.

Problem dwuwymiarowy okazał się trudniejszy. Dopiero w roku 1992 Amerykanie: Carolyn S. Gordon, David L. Webb i Scott A. Wolpert efektywnie skonstruowali (wykorzystując metodę Toshikazu Sunady) kontrprzykład, tj. dwie płaskie figury o różnych kształtach, lecz identycznych widmach drgań. Albo, w języku bardziej przystępnym: Nawet ktoś obdarzony słuchem absolutnym, ale mający zawiązane oczy, nie powie, z którego bębna pochodzi dźwięk.

Problem relacji pomiędzy kształtem a widmem jest wciąż dość intensywnie badany.