Roman Duda
Uniwersytet Wrocławski

FENOMEN MATEMATYKI GRECKIEJ

The phenomenon of Greek mathematics

Summary: The phenomenon of Greek civilization is astonishing, and new sources to it as well as new attempts at reading it are constantly appearing. Mathematics was an important component of Greek civilization and this article is an attempt to rethink it. Unlike modern monographs on the history of mathematics, which focus on mathematical achievements and, consequently, tend to emphasize the continuity in the development of mathematics – this article highlights the fundamental difference of Greek mathematics compared to the achievements of earlier civilizations. It is visible not only in the Greeks giving it the distinguishing name of a mathematics (before the Greeks it was an unnamed part of knowledge, treated as a sophisticated pastime or a practical skill), but above all in its new source, which was Greek philosophy. The philosophical origin of Greek mathematics and its strong influence on the part of various Greek philosophical schools have made general notions, theorems and proving to the fore, as well as the defining associated with them – previously completely unknown – which made it a science in the modern sense of the term and remains a constant source of inspiration. The article distinguishes and analyzes some of the characteristics of Greek mathematics, with particular emphasis on the aporia (difficulties) it encountered and the role they played in its development.

Keywords: Greek philosophy, Ionian school, Pythagoreans, Eleatic school, dialectic school, aporias, infinity, incommensurability

Słowa kluczowe: filozofia grecka, szkoła jońska, pitagorejczycy, szkoła eleacka, aporie, nieskończoność, niewspółmierność

Historia matematyki pozbawiona kierownictwa filozofii stała się *ślepa*, zaś filozofia matematyki odwracająca się od najbardziej intrygujących zjawisk historii matematyki, stała się *pusta*[1].

Wstęp

Jak pisał Bertrand Russell (1872–1970), „w całej historii nie ma nic bardziej zaskakującego i trudniejszego do objaśnienia niż nagłe powstanie cywilizacji greckiej"[2]. Cywilizacja ta nie przestaje zadziwiać, ponawiane są próby jej zrozumienia, ciągle też odkrywane są nowe źródła[3], a także wysuwane nowe hipotezy[4]. Niewątpliwie jednym ze źródeł fascynacji jest świadomość przemożnego wpływu tej cywilizacji na późniejsze dzieje myśli, w szczególności na filozofię i na matematykę.

Matematyka była ważnym elementem cywilizacji greckiej[5]. Cywilizacje wcześniejsze, przede wszystkim babilońska[6] i egipska[7], odsłoniły nam już trochę swojej wiedzy „matematycznej". Zadziwiają nas swoimi osiągnięciami[8], ale nastawienie ich wiedzy było praktyczniejsze, skupione na rozwiązywaniu pewnych typowych, wynikających z codziennych potrzeb zadań. Poczucie zaś prawidłowości uzyskiwanych rozwiązań i płynącą stąd pewność postępowania dawała im świadomość zgodności z empirią. Nie było w nich refleksji nad prawdziwością czy dokładnością – takie pojęcia nie istniały. Można tę wiedzę przyrównać do książki kucharskiej. Podobnie bowiem, jak taka książka, także matematyka była zbiorem konkretnych przepisów, a biegłość osiągano przez ćwiczenia.

---

[1] I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia naukowego*, Warszawa 2005, s. 190.

[2] B. Russell, *Dzieje filozofii Zachodu i jej związki z rzeczywistością polityczno-społeczną od czasów najdawniejszych do dnia dzisiejszego*, Warszawa 2000, s. 23.

[3] Por. R. Netz, W. Noel, *Kodeks Archimedesa. Tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata*, Warszawa 2007.

[4] Por. L. Russo, *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna*, Kraków 2005. Książka ta przynosi nowe odczytanie nauki greckiej z tezą, że nowożytna myśl naukowa pojawiła się już w okresie hellenistycznym, ale schyłek tej kultury i późniejsza dominacja Rzymu sprawiły, że została zapomniana.

[5] Autor wyraża podziękowanie recenzentowi, którego uwagi dotyczące starożytnej Grecji pozwoliły poprawić i ulepszyć tekst pierwotny.

[6] Wybitną rolę odegrali tu na początku Sumerowie, ale potem te ziemie najeżdżały inne ludy np. Akkadowie i Asyryjczycy; ten wielki tygiel obejmujemy łączną nazwą cywilizacji babilońskiej.

[7] Są to najstarsze cywilizacje z tych, które znały pismo i których pismo zostało odczytane. Pismo cywilizacji jeszcze starszych, np. Mohenjo-Daro z terenu dzisiejszych Indii, nie zostało dotychczas odczytane.

[8] O matematyce przed Grekami traktują liczne opracowania, w tym: O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Providence-Rhode Island 1957; H. Gericke, *Mathematik in Antike und Orient*, Berlin 1984; R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Cambridge Massachusetts 1972; G.G. Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, Princeton 2011; H. Wußing, *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Berlin 2008. Tamże obszerna dalsza literatura.

W XVIII w. p.n.e., z którego pochodzą najstarsze znane nam przekazy matematyki Babilonii i Egiptu[9], była to już wiedza stara, której początki ginęły w niepamięci. Wiedzę tę szanowano i przekazywano z pokolenia na pokolenie, jednakże burzliwe wydarzenia historyczne, wprowadzające zamęt i przerywające ciągłość sprawiały, że przez długie okresy niewiele do niej dodawano, a niektóre jej fragmenty i umiejętności nawet gubiono. Każda wiedza w niesprzyjających okolicznościach może zanikać, co się niejednokrotnie zdarzało i zdarza.

Grecy, którzy weszli na arenę historyczną około 1600 p.n.e., poznawali osiągnięcia cywilizacji babilońskiej i egipskiej. Nabrawszy uznania przejmowali ich intelektualne dziedzictwo. Najbardziej nas interesującą część wyróżnili nazwą *matematyka*, nadając jej w ten sposób autonomię (której wcześniej nie miała) i podnosząc jej znaczenie. Co ważniejsze, do przejętej spuścizny podeszli w oryginalny sposób i w ciągu paru wieków gruntownie ją przerobili, nadając jej nowy kształt i inny charakter.

Późniejsze wieki matematykę grecką kontemplowały trochę ją rozwijając (Arabowie), ale i popadając w długie okresy stagnacji. Dopiero nowożytna Europa w pełni ją przyswoiła, a następnie intensywnie rozwijała – stała się ona bowiem istotnym składnikiem nowożytnej nauki. W rezultacie matematyka współczesna ma więcej wspólnego z matematyką grecką, niż matematyka grecka miała z matematyką babilońską czy egipską (pomimo że okres dzielący matematykę grecką od babilońskiej i egipskiej był znacznie krótszy, niż okres dzielący ją od pojawienia się matematyki współczesnej).

Epokowy charakter przełomu dokonanego przez Greków w zakresie matematyki jest powszechnie uznawany. Jednakże pytanie, jak i dlaczego przełom ten zaszedł, rzadko jest podejmowane i dotychczas nie znaleziono zadowalającej odpowiedzi. Dlaczego Grekom przestały wystarczać dawniejsze „przepisy" i zaczęli stosować inne podejścia? Dlaczego odrzucili nieuporządkowany zbiór i zaczęli bardziej ufać teoretycznym wywodom, stopniowo odrzucając uzasadnienia empiryczne i autorytet przeszłości, a w końcu wymyślili nowy ład (aksjomatyczno-dedukcyjny) i systematycznie go rozwijali? Dlaczego, mimo napotykanych na tej drodze trudności, uparcie przy nim trwali?

Niniejszy artykuł zaczniemy od przeglądu poglądów współczesnych historyków matematyki na matematykę grecką (sekcja 2) pokazując, że skupiają się oni na osiągnięciach ściśle matematycznych, co może sugerować ciągłość. Naszym zdaniem o ciągłości można mówić jedynie w odniesieniu do przedmiotu tej wiedzy (liczby i figury), natomiast co do treści zaszła fundamentalna zmiana.

---

[9] Jednym z najważniejszych dokumentów historycznych jest tzw. papirus Rhinda, będący rolką 550 x 33 cm, której jedna strona zawiera 87 zadań z rozwiązaniami, a druga tablice matematyczne. Por. A.B. Chase, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Oberlin-Ohio 1927. Podobny charakter zbiorów zadań i tablic matematycznych mają zachowane pisma egipskie oraz babilońskie tabliczki klinowe.

Tę różnicę postaramy się wydobyć i uwydatnić, a jednocześnie rzucić pewne światło na okoliczności i przyczyny. Dla uwydatnienia tej zmiany przedstawimy krótką charakterystykę osiągnięć wcześniejszych kultur, w tym Babilonii i Egiptu, w interesującym nas zakresie (sekcja 3), oraz stosunku do nich i ich przejęcia przez Greków (sekcja 4). Przedstawimy dwie wielkie idee, które legły u podstaw cywilizacji greckiej i otworzyły przed Grekami nowy świat (sekcje 5 i 6). Rozpoczęli oni energiczną eksplorację tego nowego świata, którego istotną częścią stała się matematyka (sekcja 7). Napotykali trudne problemy nieznanego wcześniej rodzaju i tworzyli nowe metody (sekcja 8). Szczególnie nas interesującą część tego świata pitagorejczycy wyróżnili właśnie jako *matematykę* (sekcja 9), co pozwoliło na zarysowanie jej nowej wielkiej roli (sekcja 10). Ale już na początku tej drogi pojawiły się *aporie* (pierwsi byli eleaci), czyli poważne trudności (sekcja 11). Dwie okazały się szczególnie brzemienne w skutkach: pochodząca od pitagorejczyków aporia niewymierności (sekcja 12) i eleackiego pochodzenia aporia nieskończoności (sekcja 13). Nie zahamowały one rozwoju matematyki, ale silnie na nią wpłynęły, chociaż ich ostateczne przezwyciężenie dokonało się ostatecznie dopiero niemal współcześnie, w wiekach XIX i XX. Matematykę grecką kształtowały także inne bodźce płynące ze strony różnych szkół filozoficznych, np. eleacka dialektyka przyczyniła się do powstania i rozwoju systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego (sekcja 14), a atomiści wpłynęli na rozwój metod konstrukcyjnych (sekcja 15). Naturalna dla Greków bliskość matematyki i filozofii pozwoliła im dostrzec problem charakteru istnienia obiektów matematycznych, a jego realistyczne rozwiązanie na gruncie filozofii podniosło niebywale kulturowe znaczenie matematyki (sekcja 16). Wielkie osiągnięcia matematyków greckich wieków VII–IV p.n.e. doprowadziły do wspaniałej syntezy (sekcja 17), która utrwaliła wysoki status matematyki greckiej i stała się obowiązującym odtąd wzorcem każdej wiedzy ścisłej. Cały ten artykuł jest argumentacją za tezą, że matematyka grecka wyszła z filozofii i długo pozostawała pod jej przemożnym wpływem, że filozofia nadała jej kształt i do dzisiaj odczuwalny impet. Bliski związek matematyki z filozofią miał jednak także ujemne strony, w tym niechętny stosunek do praktyki, a w procesie poznawania świata rodził takie przeszkody jak dogmat kołowy (sekcja 18). Artykuł kończy rzut oka na dalsze dzieje matematyki greckiej (sekcja 19).

2. Przegląd poglądów na matematykę grecką

Wyraźną cezurę w rozwoju matematyki greckiej stanowi dzieło *Elementy* Euklidesa (ok. 300 p.n.e.), w którym podsumowano jej wcześniejszy okres. Jednocześnie przytłaczająca wspaniałość tego dzieła niemal całkowicie ten okres zatarła i stąd wielkim problemem związanym z wczesną matematyką grecką jest ubóstwo źródeł. Z okresu przed Euklidesem (VIII–IV w. p.n.e.) zachowało się jedynie parę mało istotnych tekstów. Zaginęły pisma Eudemosa, ucznia Arystotelesa i pierwszego historyka matematyki. Niektóre stare teksty zostały wchłonięte przez *Elementy* Euklidesa, większość zastała jednak zapomniana. Krótki zarys tych wczesnych dziejów dał dopiero Proklos żyjący w V w. n.e.[10], ale matematyka grecka była już wtedy ukształtowana i świadoma swego znaczenia i ta okoliczność utrudnia rozpatrywanie jej początków, skazując nas na domniemania i hipotezy. Z okresu po Euklidesie źródeł jest już wiele. Po Proklosie jednak matematyka grecka zapadła w okres schyłkowy, który przetrwał dzięki Arabom i z którego zaczęło ją wydobywać dopiero późne europejskie średniowiecze.

Taki stan rzeczy odbija się na obrazie matematyki greckiej w XX-wiecznych monografiach z historii matematyki. Cajori źródeł matematyki greckiej upatruje w greckim pragnieniu wiedzy oraz żywych związkach handlowych Grecji z Egiptem, po czym przechodzi do przedstawienia pojedynczych osób i ich osiągnięć[11]. Struik początki matematyki umiejscawia w kulturach Egiptu i Babilonii, natomiast wkład Greków miał, jego zdaniem, polegać na jońskim racjonalizmie: „matematyka pomagała znaleźć porządek w chaosie, ułożyć idee w logiczne łańcuchy i znaleźć podstawowe zasady"[12]. Według 3-tomowej monografii pod redakcją Juszkiewicza, początkowo (wieki VIII–VII p.n.e.) matematyka grecka była taka jak na Wschodzie, natomiast w VI w. p.n.e. „przekształca się z zadziwiającą szybkością w abstrakcyjną naukę dedukcyjną, w której podstawową metodą poszukiwania prawdy i badania związków logicznych między twierdzeniami jest dowód logiczny"[13]. Stawiając pytanie „jak to się stało?" wskazuje ona na powszechność debat w greckim życiu publicznym, sztukę prowadzenia sporów, w tym publicznej obrony swoich tez, a także czas wolny obywateli, którzy mogli się takim praktykom oddawać. Van der Waerden wskazuje na związki łączące Grecję ze Wschodem i przejmowanie przez Greków „przepisów"[14]. Uważa, że impulsem, który skłonił Greków do szukania uzasadnień, stała się okoliczność, że zawarte w nich informacje bywały niezgodne, np. Babilończycy obliczali powierzchnię koła o promieniu r według formuły $3r^2$, a Egipcjanie według formuły $(8/9.2r)^2$. Z wcześniejszych matematyków greckich autor wyróżnia jedynie Talesa, po czym skupia się na osiągnięciach pitagorejczyków i Euklidesa.

Każdy z tych autorów dostrzega więc odmienność i oryginalność matematyki greckiej, ale żaden nie bada źródeł i charakteru tej odmienności. Więcej uwagi (6 rozdziałów) poświęca matematyce greckiej dopiero Kline[15]. Opisuje ją na tle

---

[10] Przekład angielski: G.F. Proclus, *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, tłum. G.R. Morrow, Princeton New York 1992.

[11] F. Cajori, *A History of Mathematics*, New York 1961, s. 15.

[12] D.J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*, Warszawa 1960, s. 54–55.

[13] I.G. Baszkamowa, *Grecja starożytna: Kraje hellenistyczne i imperium rzymskie*, [w:] *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, t.1, red. A.P. Juszkiewicz, tłum. S. Dobrzycki, Warszawa 1975, s. 66.

[14] B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, t. 2, Basel-Stuttgart 1968.

[15] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York 1972, s. 47.

dziejów cywilizacji greckiej, poczynając od szkoły jońskiej, a następnie poprzez pitagorejczyków i eleatów przechodzi do sofistów i Aten, Platona, Eudoksosa i Arystotelesa, by w końcu najobszerniej omówić osiągnięcia Euklidesa i Archimedesa. Kline jest więc bardziej wnikliwy od poprzedników i uwidacznia istotne związki matematyki greckiej ze współczesnymi im szkołami filozoficznymi.

Katz podkreśla stymulujące znaczenie greckich kontaktów handlowych, a w szczególności fakt, że „Grecy zetknęli się z odmiennymi odpowiedziami na fundamentalne pytania dotyczące świata, więc zaczęli tworzyć własne odpowiedzi”[16]. Co więcej, „zaczęli pytać i odpowiadać »dlaczego«”. Staje więc na stanowisku bliskim van der Waerdena, ale i on nie wnika w to głębiej i przechodzi do omówienia szkół i ich dorobku.

Wußing przypomina tło historyczno-polityczne i spory wpływ wcześniejszych kultur. Uznaje, że Grecy dokonali historycznego zwrotu ku nowoczesnej matematyce, w czym pomogło im „myślenie dialektyczno-filozoficzne” obecne już u pierwszych matematyków, Talesa i jego następców, oraz mnogość spekulacji na temat świata[17]. W ambitnym kompendium historii i filozofii matematyki, pod redakcją Grattana-Guinnessa, widnieje informacja o ubóstwie źródeł do dziejów matematyki greckiej, a jej opis zaczyna się od *Elementów* Euklidesa[18].

Do tych kilku dzieł można dodać dalsze, np. von Fritz wiąże rozwój matematyki dedukcyjnej z rozwojem logiki Arystotelesa[19]. Wszystkie one przedstawiają jednak obraz podobny: dostrzegają jakościową odmienność matematyki greckiej, ale wyjaśnieniu źródeł i charakteru tej odmienności poświęcają mało uwagi, na ogół formułując tylko okoliczności mające sprzyjać tej odmianie, a poza tym skupiając się na technicznej stronie rozwoju matematyki, tj. przedstawiając czołowych twórców i uzyskane przez nich wyniki. Ta ostatnia uwaga – skupienie na technicznej stronie rozwoju – w jeszcze większym stopniu odnosi się do wczesnych dzieł poświęconych wyłącznie matematyce greckiej[20]. W ostatnich paru dziesiątkach lat pojawiły się jednak inne dzieła – do niektórych z nich będziemy się niżej odwoływać[21]. Nie ujmując znaczenia wskazywanym okolicznościom

[16] V.J. Katz, *A History of Mathematics. An Introduction*, Reading Massachusetts 1998, s. 47.

[17] H. Wußing, *6000 Jahre Mathematik*…, część 1, str. 159–161.

[18] *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, t. 1–2, red. I. Grattan-Guinness, London-New York 1994.

[19] K. von Fritz, *Die Archai in der griechischen Mathematik*, „Archiv für Begriffsgeschichte” 1955, nr 1, s. 13–103. Także K. von Fritz, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin-New York 1971.

[20] Th.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, t. 1–2, Oxford 1913.

[21] Por. D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Oxford 1999; W.R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, Dordrecht-Boston 1975; F. Lasserre, *The Birth of Mathematics in the Time of Plato*, London-New York 1964; A. Szabó, *Die Entfaltung der griechischen Mathematik*, Mannheim 1994.

uważamy jednak, że są one wtórne. Większą bowiem rolę odegrało greckie nastawienie do świata. Będziemy się starali wykazać, że przemożny wpływ na powstanie greckiej matematyki i jej późniejsze dzieje wywarła grecka filozofia. Nie sposób zrozumieć greckiej matematyki bez uwzględnienia tego wpływu.

3. Wiedza wcześniejsza, w tym Babilonii i Egiptu

Jak mawiał M. Eliade, człowiek pierwotny był jednocześnie *homo religiosus, faber et ludens*. Miał świadomość ogromu otaczającego go świata, pełnego przerażających, niezrozumiałych sił. Ten świat próbował tłumaczyć przez mity, wśród których szczególną rolę odgrywały mity początku, objaśniające świat poprzez jego pochodzenie. Dopełnieniem mitów były ryty, uczące obcowania z wypełniającymi świat siłami. Przeżycie ułatwiały mu nabywane umiejętności, a umilały i rozładowywały napięcia ludyczne zabawy. W takich okolicznościach rodziła się pierwotna kultura i chociaż niewiele wiemy o kulturze ludów prehistorycznych (podstawowych informacji dostarczają ślady materialne i ich analiza oraz dociekania archeologów, antropologów, etnografów, historyków religii, lingwistów i innych), to już wtedy – wiele tysięcy lat temu – musiały pojawić się pierwsze idee dotyczące liczb i figur[22].

Na dawne pochodzenie pojęć liczbowych i figuralnych wskazuje okoliczność, że kiedy na przełomie IV i III tysiąclecia p.n.e. z mroków prehistorii wyłoniły się najstarsze cywilizacje historyczne, wśród nich Babilonia i Egipt – dysponowały już one z dawna przyswojonymi abstrakcyjnymi pojęciami liczb całkowitych i niektórych ułamków. Potrafiły wykonywać na nich proste rachunki, a także znały niektóre figury i potrafiły dokonywać pomiarów, by potem w oparciu o nie obliczać powierzchnie i objętości niektórych z tych figur i brył.

Badania ludów pierwotnych i analizy lingwistyczne pokazują, że proces dochodzenia do abstrakcyjnego pojęcia liczby był długi i napotykał rozmaite przeszkody. Niektóre ludy pierwotne jeszcze dzisiaj liczą „jeden-dwa-dużo", inne mają różne liczebniki dla obiektów różnych gatunków, np. inne dla ludzi, inne dla chat, inne dla bydła itd. (ślady liczebników „gatunkowych" przetrwały we współczesnym języku japońskim), jeszcze inne nadawały liczbom szczególne znaczenie, np. 1 – jedność, 2 – małżeństwo, 10 – wszechświat itp. Były to istotne przeszkody utrudniające rozwój abstrakcyjnej arytmetyki (jaki ma sens dodawanie łodzi i bydła?) do stanu, w którym wszystkie liczby traktowane są jednakowo abstrakcyjnie. Rozwój ten musiał więc trwać długo, ale u Babilończyków i Egipcjan możemy już podziwiać w pełni abstrakcyjne rozumienie liczb. Co więcej, ich cywilizacje miały też poczucie wielkiej mocy liczb, odkrywanej nie tylko przez *rachowanie*, pozwalające uzyskiwać ukryte w nich informacje, ale dzięki *mierzeniu* mogącemu służyć też do opisywania elementów świata. Te możliwości

---

[22] Por. R. Duda, *Roots of mathematics*, „Organon" 2017, nr 49, s. 5–27 – tamże dalsza literatura.

budziły podziw zmieszany z lękiem[23]. Wiedzę tę jednak bardzo szanowano. Nie była to jeszcze wiedza jakoś nazwana i wyodrębniona. Stanowiła niewyróżnioną część ogólnej kultury, a pieczę nad nią mieli zapewne kapłani, których status pozwalał na luksus wolnego czasu i medytacji, a także nadawał tej wiedzy status niemal boski. Śledząc późniejsze dzieje tej wiedzy po jej greckim wyodrębnieniu i autonomizacji, łatwo zapomina się o jej prastarym pochodzeniu i długim uwikłaniu w ogólną kulturę.

Najstarsze zabytki pisane odnoszące się do tej wiedzy sięgają XVIII w. p.n.e. (babilońskie tabliczki klinowe, egipskie zwoje skórzane i papirusy)[24]. Wieki XVIII–XVI p.n.e. były okresem jej rozwoju. Potem nastąpiła wielowiekowa dekadencja, kiedy to mierzenie i rachunki były wprawdzie praktykowane, ale ich zasób się nie powiększał, a nawet malał. Cechą charakterystyczną tekstów odnoszących się do tej wiedzy z XVIII–XVI w. jest to, że są one wyłącznie zbiorami konkretnych zadań, często z podanymi rozwiązaniami lub tablicami matematycznymi ułatwiającymi rachunki, jak współczesna tabliczka mnożenia. Nie ma tam rozważań ogólnych, podawane zaś rozwiązania mają charakter instrukcji postępowania („dodaj", „pomnóż" itd.). Biegłość osiągano nie przez przyswojenie sobie ogólnej reguły (bo takich reguł nie było), ale przez rozwiązywanie wielkiej liczby zadań, co jest zresztą także dzisiejszą praktyką szkolną[25].

Konkretność zadań wskazuje, że wiedza matematyczna Babilończyków i Egipcjan wynikała i odnosiła się do codziennego doświadczenia, które stanowiło jednocześnie jej sprawdzian i uzasadnienie. Zaszli jednak na tej drodze daleko. Na tabliczkach babilońskich znajdujemy zadania prowadzące (używając dzisiejszej terminologii) do równań z jedną niewiadomą pierwszego i drugiego stopnia, układów dwóch równań o dwóch niewiadomych, a nawet niektórych równań trzeciego stopnia. Biegłość w rozwiązywaniu takich zadań – bez zapisu literowego i bez symboliki algebraicznej, których nie mieli – była ogromna. Rachowanie ułatwiał Babilończykom system sześćdziesiątkowy, który stworzyli i rozwinęli, i który był potem w użyciu przez parę następnych tysiącleci, jeszcze bowiem w średniowiecznej Europie posługiwali się nim astronomowie, a jego ślady przetrwały do dzisiaj w miarach czasu i kątów. Babilończycy obserwowali też nocne niebo, znali roczny ruch słońca i ekliptykę, którą podzielili na 12 części, potrafili

---

[23] Podobny lęk pojawiał się również później, np. w X w. Wiedza matematyczna mnicha Gerberta (późniejszego papieża Sylwestra II) wydawała się niektórym tak niesamowita, że podejrzewali go o kontakty z diabłem.

[24] Zestawienie najstarszych zabytków pisanych odnoszących się do matematyki podaje O. Neugebauer, *The Exact Sciences*…

[25] Próbę rzucenia światła na tę praktykę daje *zasada paralelizmu*, według której ontogeneza jest rekapitulacją filogenezy. W odniesieniu do rozwoju psychicznego oznacza to, że rozwój psychiczny dziecka przechodzi – w wielkim skrócie – przez podobne etapy, jak cała ludzkość. Por. R. Duda, *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, „Dydaktyka Matematyki" 1982, nr 1, s. 127–137.

obliczać daty zaćmień[26]. Podobnie duża była wiedza Egipcjan. Mieli oni system dziesiętny zapisywania liczb (ale jeszcze nie pozycyjny) i jeszcze bardziej imponującą geometrię. Z tym że ich sztuka rachunkowa była słabiej rozwinięta.

Dla zrozumienia tamtych cywilizacji, a w szczególności kontrastu z przyszłą cywilizacją grecką, należy też mieć na uwadze ich odmienne nastawienie do świata. Egipcjanin każdą napotkaną nową ideę traktował jako dar bogów i bez oporów włączał w system swoich przekonań. Zachowywał się jak kompozytor, który tworzy symfonię dźwięków – on tworzył symfonię idei. Jego ideałem była równowaga i zachowanie mechanizmu świata, ustanowionego kiedyś przez Stwórcę. W jego umyśle pojęcia prawdy i fałszu czy przyczyny i skutku, które u Greków nabrały wielkiego znaczenia – rysowały się mgliście. Dominowało dążenie do ładu, harmonii i syntezy, nie było natomiast tendencji do analizy[27]. Jedną z konsekwencji takiego nastawienia było to, że koryfeusze wiedzy babilońskiej czy egipskiej nie odczuwali potrzeby szukania racjonalnych uzasadnień dla swoich reguł ani racjonalnych objaśnień dla obserwowanych zjawisk. Nie zadawali sobie pytań „dlaczego?”, np. dlaczego trójkąt o bokach 3, 4, 5 (używany przez Egipcjan do wyznaczania kąta prostego) wyznaczał kąt prosty? Dlaczego zachodzą zaćmienia? Zadowalali się empirią, poświadczaną codziennym doświadczeniem (prostokątnością tego trójkąta) albo mitami (mitycznymi objaśnieniami zaćmień). Ich wiedza była nierozdzielnie związana z codziennym życiem i wpisana w ich mitologię.

4. Przejęcie wcześniejszej wiedzy przez Greków

W owym czasie, mniej więcej w okresie 1500–800 p.n.e., tereny dzisiejszej Grecji zalało kilka fal koczowników. Pierwsza, fala jońska, założyła Ateny i rozlała się po wybrzeżach Azji Mniejszej, gdzie wymieszała się z ludami wcześniej zamieszkującymi te ziemie i przejęła ich kulturę[28]. Jońskie były więc Ateny, ale także Milet, Efez i Samos. Po Jonach przyszli Eolowie, potem Achajowie i Dorowie (znani z eposów Homera) i wszystko to razem stopiło się w Grecję klasyczną. Grecy byli ludem nowym, zdobywczym i ambitnym, a swoje osady zakładali na ogromnych obszarach od wybrzeży Azji Mniejszej (Jonia) po południowe krańce Italii (Krotona, Elea), a nawet dalej (Krym, Galia, Hiszpania). Ich żywiołem było morze i jako napastnicy i łupieżcy, a potem kupcy i żeglarze, ciekawi świata i pewni siebie, łatwo wchodzili w kontakty z ludźmi innych kultur i bez oporów, jakie może rodzić zasiedziała tradycja, przejmowali ich kulturę, a przejąwszy – przetwarzali[29].

[26] B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft…*, t. 2.

[27] J. Manchip-White, *Starożytny Egipt, jego kultura i historia*, Wrocław 1976, s. 33.

[28] O wpływie wcześniejszych cywilizacji na myśl Greków ciekawie pisze M. Eliade, *Sacrum a profanum. O istocie sfery religijnej*, Warszawa 2021.

[29] P. Lévêque, *Świat grecki*, tłum. J. Olkiewicz, Warszawa 1973; B. Brawo, E. Wipszycka, *Historia starożytnych Greków*, t. 1–3, Warszawa 1988; A. Ziółkowski, *Historia Powszechna. Starożytność*, Warszawa 2009

Kiedy w VIII w. p.n.e. Grecy weszli w okres historii pisanej, wiedza Babilończyków i Egipcjan była zastygła od tysiąca lat. Rozwiązywano typowe dla tej wiedzy zadania i wykonywano stosowne rachunki, bo ułatwiało to życie codzienne, czyniono to zgodnie z tradycyjnymi procedurami, nad którymi się nie zastanawiano. Wystarczał autorytet przeszłości, używano bowiem tej wiedzy od niepamiętnych już wtedy czasów.

Grecy tę wiedzę Babilończyków i Egipcjan przejmowali z szacunkiem i podziwem, ale nie byli bezkrytyczni. Przychodząc z zewnątrz, nie zadowalali się jej przejmowaniem, ale pytali o jej pochodzenie i uzasadnienie. Ich skłonność do krytycznego osądu kazała im się zastanawiać nad ich prawomocnością, a mogły ich też dziwić rozbieżności, np. pole okręgu o średnicy 9 było dla Egipcjan równe 64, a dla Babilończyków 60,75[30]. Różnica w praktyce może niewielka, ale krytycznych Greków musiało to zastanawiać.

Grecy przyznawali się do przejmowania dziedzictwa Babilończyków i Egipcjan. Przykładowo pitagorejczyk Archytas pisał około 400 r. p.n.e., że „oni przekazali nam jasną wiedzę o biegu gwiazd, o ich wschodach i zachodach, o geometrii, arytmetyce i sferach, wreszcie o muzyce, gdyż wszystkie te nauki są jak siostry"[31]. Kontakty z Egipcjanami ułatwiały Grekom osiedla handlowe, w tym Naukratis, grecka faktoria założona przez nich w delcie Nilu dla handlu z Egiptem. Herodot uważał Egipt za kolebkę greckiej cywilizacji[32], ustami zaś Sokratesa Platon powiada, że to egipski bóg Toth wymyślił arytmetykę, geometrię i astronomię[33]. Aczkolwiek dużo zawdzięczali kulturom Babilonii i Egiptu – Grecy potrafili spojrzeć na ich dorobek krytycznie. Nie odrzucili tego dorobku, próbowali go jednak ogarnąć racjonalnie, a w rezultacie genialnie go przekształcili i zmienili nie do poznania. Jak ze słuszną dumą pisał autor *Epinomis*, „cokolwiek Grecy przejmowali od obcych, rozwijali to i udoskonalali"[34]. To inne nastawienie Greków do przejmowanej wiedzy niewątpliwie wynikało z ich innego nastawienia do świata.

[30] Z analizy ówczesnych zadań wynika, że pole koła o średnicy d Egipcjanie obliczali według reguły $(8/9.d)^2$, a Babilończycy – według reguły $3/4.d^2$, co daje przybliżenie $\pi \approx 3{,}16$ i $\pi \approx 3$, odpowiednio.

[31] I. Thomas, *Greek Mathematical Works*, t. 1: *Thales to Euclid*, Cambridge 1939, s. 5. Cyt. za O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza. Z dziejów relacji między nauką a teologią*, tłum. W. Skoczny, Tarnów 1997, s. 40.

[32] Więcej na ten temat w: E.A. Maziarz, Th. Greenwood, *Greek Mathematical Philosophy*, New York 1968.

[33] Platon, *Fajdros*, 274C, [w:] Platon, *Dialogi*, tłum. W. Witwicki, Warszawa 2000.

[34] Platon, *Epinomis*, 987d, [w:] Platon, *Dialogi*… Wielu badaczy uważa obecnie ten dialog za pseudoplatoński [uwaga recenzenta].

5. Greckie „umiłowanie mądrości" i elementy stałości

Jak wszystkie pierwotne cywilizacje, Grecy również posiadali bogatą mitologię, jednakże ich postawa była skierowana nie na utrzymywanie równowagi i pełną szacunku zachowawczość, nie na kontemplację dorobku poprzednich pokoleń i tworzenie mało refleksyjnych syntez, ale na swobodne spekulacje umysłowe i zdobywcze odkrywanie, z czego wynikało krytyczne stanowisko wobec przejmowanego dziedzictwa i skłonność do jego poprawiania. Z takiej postawy wyrastała krytyczna i racjonalna refleksja nad światem i człowiekiem. Na plan pierwszy w tej refleksji wysuwały się, mitologicznego zresztą pochodzenia, pojęcia prawdy i fałszu, przyczyny i skutku, w poprzednich cywilizacjach rysujące się nader mgliście, natomiast przez Greków uznane za kluczowe i poddane krytycznej refleksji, a w konsekwencji dynamizujące rozwój.

W takiej atmosferze u zarania cywilizacji greckiej pojawiły się dwie całkowicie nowe, godne najwyższego podziwu myśli, które ukształtowały ich (a w ślad za nimi i nasze) nastawienie do świata. Według pierwszej z nich (o drugiej mowa w sekcji 6) <u>zmienne zjawiska mogą posiadać stałą naturę</u>. Drogę do takiej myśli mogła torować tragedia grecka, wielcy tragicy (Ajschylos, Sofokles, Empedokles) kształtowali bowiem przekonanie, że świat przenika ład moralny, sprawowany przez bezlitosne i nieubłagane *fatum*, którego nic nie może zmienić. Idea takiego *fatum* przeniesiona na przyrodę przyjmowała postać wszechobejmującego *prawa natury*. Niezależnie od teatru, na taką myśl mogła też Greków naprowadzić cykliczność niektórych obserwowanych zjawisk, np. następstwo pór dnia czy pór roku, przypływów i odpływów morza itp. Z takich źródeł wyrastając, myśl ta prowadziła do przekonania, że zjawiska obserwowane w przyrodzie (na przykład zaćmienia) nie są rezultatami decyzji nieprzewidywalnych bóstw, ale stanowią konsekwencję <u>wewnętrznej konieczności</u>, która przymusza przyrodę do takich właśnie zachowań. Inaczej mówiąc, każde zachodzące w przyrodzie zjawisko ma <u>przyczynę</u> w niej samej i jest <u>skutkiem</u> tej przyczyny, czyli pojawia się z powodu jakiegoś innego zachodzącego w niej zjawiska, które wymusza takie zachowanie. Krótko mówiąc, <u>przyroda jest samowytłumaczalna</u>, co znaczy tyle, że zjawiska w niej obserwowane powinny mieć wytłumaczenie w niej samej. Ta niezwykle oryginalna myśl zadziwia także i tym, że dla jej wyrażenia potrzebne były mgliste wcześniej pojęcia przyczyny i skutku oraz spojrzenia na przyrodę *in toto*, w której pozornie wszystko się zmienia, ale umysł jest zdolny dostrzec elementy niezmienne. Podziw budzi więc nie tylko zaskakująca oryginalność Greków, ale i tworzenie pojęć nowych, obcych duchowości poprzednich cywilizacji i oblekanie swoich myśli w te nowe pojęcia.

Od tej fundamentalnej myśli, że przyroda zawiera elementy stałości, a zjawiska w niej zachodzące są wyjaśnialne i powinny znaleźć wyjaśnienie w niej samej, wszystko się zaczęło, a jej wpływ trwa do dzisiaj. Myśl, że przyroda jest samowytłumaczalna, pojawiła się w starożytnej Jonii, na wybrzeżach Azji Mniejszej i legła u podstaw cywilizacji greckiej. Późniejsza tradycja grecka zrodzoną stąd refleksję nazwała „umiłowaniem mądrości”, czyli *filozofią,* i wywodziła od „siedmiu mędrców”. Różne przytaczano nazwiska tych „siedmiu mędrców”, ale wśród nich jedno powtarzało się stale: Tales z jońskiego Miletu (640–547 p.n.e.)[35]. Wielość tych nazwisk świadczy jednak, że owi „mędrcy” tworzyli już środowisko i choć Tales się w nim wyróżniał, to nie był sam – byli także ludzie, którzy go rozumieli i włączali się krytycznie, podejmując jego rozważania. Środowisko to stworzyło jońską filozofię przyrody. Wiele osiągnięć przypisywanych później Talesowi mogło pochodzić od innych filozofów[36].

W VI w. p.n.e. Jonia została opanowana przez Persów, którzy pół wieku później trzykrotnie usiłowali podbić także Grecję właściwą. Jednym ze skutków tych wojen, które przeszły do historii Europy pod nazwą wojen perskich, była migracja Greków z Jonii, co przyczyniło się do upowszechnienia postawy „umiłowania mądrości” w całym świecie greckim, a w szczególności do powstania kilku następnych szkół filozoficznych, w tym pitagorejskiej, założonej przez Pitagorasa (ok. 580 – ok. 500 p.n.e.) w Krotonie, i eleackiej, założonej przez Parmenidesa (ok. 540 – ok. 450 p.n.e.) w Elei. Oba te miasta leżały w tzw. Wielkiej Grecji, jak nazywano wówczas południową Italię.

6. Greckie „umiłowanie mądrości” i pojęcia ogólne

Myśli o samowystarczalności przyrody towarzyszyła myśl druga, wyrażająca się w tendencji do tworzenia pojęć ogólnych, takich jak *prawda* czy *dobro*. Z czym łączyło się przekonanie, że prawdziwa wiedza powinna wyrażać się właśnie poprzez takie ogólne pojęcia. Jak później powiedział Arystoteles, „zadaniem wiedzy naukowej jest poznawanie ogółu”[37]. Również ta myśl była nowatorska i oryginalna, zmuszała bowiem do uznania, że jej konsekwencją będzie „wyjaśnianie zjawisk za pomocą bytów nieobserwowalnych”[38]. Był to drugi ogromnie ważny krok na drodze budowania racjonalnej i krytycznej wiedzy o świecie, czyli nauki – druga fundamentalna zmiana w greckim podejściu do świata[39]. Łącznie te

[35] Daty życia Talesa, Pitgorasa, Parmenidesa i innych wczesnych filozofów greckich są niepewne.

[36] Większość informacji o Talesie i jego osiągnięciach zawdzięczamy późniejszemu o tysiąc lat Proklosowi, por. *Procli Diadochi*…

[37] Arystoteles, *Analityki wtóre*, 87b, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 1, Warszawa 1990.

[38] L. Russo, *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna*, tłum. I. Kania, Kraków 2005, s. 36.

[39] Na fundamentalny charakter tej zmiany wskazuje ciekawe porównanie z cywilizacją babilońską, która nie znała ogólnego pojęcia kradzieży i nie miała na to osobnego terminu, chociaż w konkretnych przypadkach umiano kradzież rozpoznawać i uważano ją za czyn karalny, por. P. Garelli, *Asyriologia. Odkrywanie Wschodu Starożytnego*, tłum. M. Korotaj, Warszawa 1998, s. 96.

dwa kroki złożyły się na przejście od mitologii do filozofii, czyli od mitycznego objaśniania świata do racjonalnej refleksji nad światem i człowiekiem. Ta fundamentalna zmiana nie mogła jednak być i nie była raptowna, nigdy też nie stała się całkowita. Niemniej ta nowa myśl, charakteryzująca się upartym dążeniem do przeniknięcia świata rozumem – pojawiła się i nie dała się już usunąć. Była to myśl prawdziwie rewolucyjna. Jak trafnie ją oceniał Olaf Pedersen „będąc całkowitym zaprzeczeniem mądrości poprzednich stuleci prowokowała ferment intelektualny. W porównaniu z nim wszystkie późniejsze rewolucje naukowe wydają się drobnymi falami na powierzchni oceanu myśli”[40].

Taki był początek filozofii, a wraz z nim – początek racjonalnej wiedzy o przyrodzie, czyli *nauki*. Filozofia grecka wyrastała z mitologii i sporo z niej czerpała, np. mitologiczne pochodzenie miały koncepcje konieczności czy przyczyny i skutku, długo też obie współżyły. Jak świadczy Arystoteles, Tales sądził, że „wszystko jest pełne bogów”[41]. Nie będziemy tu jednak opowiadać ani dziejów filozofii[42], ani dziejów nauki[43]. Skupimy się natomiast na jednym ich elemencie, który niebawem zostanie nazwany *matematyką* i okaże się ważnym składnikiem greckiej cywilizacji. Nie będziemy też opowiadać historii matematyki, ta bowiem jest dość dobrze już poznana, zwłaszcza od czasów po Euklidesie. Skupimy się natomiast na genezie matematyki greckiej i jej specyficznych cechach, decydujących o jej oryginalności i sile.

7. Narodziny greckiej matematyki

Matematyka grecka wyrosła z greckiej filozofii w wysiłku nowego ujęcia części spuścizny przejmowanej od Babilończyków i Egipcjan, a w szczególności wtłoczenia jej w ramy pojęć ogólnych, które należało w tym celu stworzyć. Pierwsze pojęcia ogólne w zakresie obejmującym zadania z konkretnymi liczbami i figurami, których rozwiązanie miało być konkretną liczbą – tradycja grecka przypisała właśnie Talesowi. Oczywiście liczba 2 czy trójkąt o bokach 3, 4 i 5 też są pojęciami ogólnymi, ale greckie dążenie do ogólności sprawiło, że wznieśli się oni na wyższy poziom, na którym mówi się nie o konkretnych liczbach, jak 3, 4 i 5. Przedmiotem rozważań stają się *klasy* (rodzaje), *liczb* oraz *liczba* w ogóle, i nie konkretne figury z ich konkretnymi rozmiarami, ale *klasy* (rodzaje) *figur*.

40 O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza*…, s. 33.

41 Arystoteles, *O duszy*, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 3, Warszawa 1992, 411a.

42 W zakresie dziejów filozofii greckiej na polecenie zasługuje: G. Reale, *Historia filozofii starożytnej*, t. 1–5, tłum. E.I. Zieliński, Lublin 1999–2005. Całe dzieje filozofii obejmuje: W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, t. 1–3, Warszawa 1958. Por. także B. Russell, *Dzieje filozofii Zachodu i jej związki z rzeczywistością polityczno-społeczną od czasów najdawniejszych do dnia dzisiejszego*, tłum. T. Baszniak, A. Lipszyc, M. Szczubiałka, Warszawa 2000; *Historia filozofii zachodniej*, red. R.H. Popkin, Poznań 2008 i inne dzieła.

43 Por. R. Taton, *Histoire générale des sciences*, t. 1, Paris 1957.

Wyróżniali liczby, które dają się układać w kształty geometryczne, a więc liczby *trójkątne*, *prostokątne*, *kwadratowe* itp., a nadto liczby *pierwsze* i liczby *złożone*, liczby *doskonałe* i pary liczb *zaprzyjaźnione*, wyróżniali *koło* (ogólnie), *trójkąt* (ogólnie) oraz niektóre rodzaje trójkątów, np. trójkąty *równoramienne*, *czworoboki* (ogólnie) i niektóre ich rodzaje, np. *kwadraty*, i tak dalej.

Pojęcia ogólne mają sens, jeśli służą wyrażeniu jakiejś myśli. Talesowi przypisuje się też sformułowanie pierwszych takich myśli, czyli zdań zawierających pojęcia ogólne i stwierdzających pewne ich własności, w tym zdania „średnica dzieli koło na dwie równe połowy" (zwraca uwagę nieznana przed Grekami ogólność: każda średnica dowolnego koła), czy zdania „kąty u podstawy trójkąta równoramiennego są równe" (kąty każdego trójkąta, który ma dwa boki równe, przylegające do tych boków), i parę dalszych[44]. W przytoczonych zdaniach występuje ogólne pojęcie *koła*, zadziwiająco ogólne pojęcie *kąta*, pojęcie *trójkąta równoramiennego* (charakteryzującego się tylko tym, że ma dwa boki równe, niezależnie od jego kształtu, rzeczywistych rozmiarów i położenia), oraz pojęcia takie jak miara odcinka czy kąta, równość liczb czy miar itd.

Takiej ogólności w Babilonii i Egipcie nie było. Grecy zdawali sobie sprawę, że wchodzili na nowy, wcześniej nieznany teren i choć od takiej ogólności mogło zakręcić się w głowie, to śmiało rozpoczęli jego penetrację, a w perspektywie zarysował się przed nimi nowy, czysto racjonalny rodzaj wiedzy o świecie. Ta perspektywa pociągnęła Greków, a ich geniusz wyraził się w ich osiągnięciach.

Wiele wskazuje na to, że to przejście od liczbowego i figuralnego konkretu do ogólnych pojęć liczb i figur dokonało się już w Jonii na przełomie VII i VI w. p.n.e. i że dokonało się ono nagle i jednorazowo. Z powodu wydarzeń politycznych w Azji Mniejszej wielu Greków przenosiło się wówczas do Kretony (Pitagoras), Elei (Zenon), Abdery, Aten i innych miast (migracje były zresztą stałym zjawiskiem w greckiej cywilizacji, np. pitagorejczycy opuścili potem Wielką Grecję, przenosząc się do Grecji właściwej, głównie do Aten). Przejście to szybko stało się znane i zyskało uznanie w całym greckim świecie. W wyniku tego przejścia w obiegu ogólnym myśli pojawiły się pojęcia o niespotykanej wcześniej ogólności (*koło*, *trójkąt równoramienny*, *kąt* i jego *miara*, *równość* itp.) Ten kontrast z poprzednią wiedzą jest tak uderzający, że zachodzi potrzeba wyróżnienia go i nazwania. Nazwijmy go zatem przejściem od empirycznego konkretu do racjonalnej ogólności lub, krótko, przejściem od konkretu do ogólności.

W konsekwencji tego przejścia pojawiły się i upowszechniły zdania ogólne, których nikt wcześniej nie wypowiadał. Zerwanie z dotychczasowym konkretem

[44] Te twierdzenia przypisał Talesowi Eudemos z Rodos, uczeń Arystotelesa, w swoim dziele *Historia matematyki*. Eudemos był pierwszym historykiem matematyki, ale jego dzieło się nie zachowało. Fragment dotyczący Talesa przytacza jednak Proclus, *In Euclidis Elementarum*…; por. F. Cajori, *A History of Mathematics*, New York 1961, s. 16. Por. także P. Tannery, *La géométrie grecque*..., Paris 1887.

zapowiadało ogromną ekonomię wiedzy[45]. Zdania takie odnosiły się bowiem do każdego koła, każdego trójkąta równoramiennego itd. A jednocześnie otwierało oszołamiające perspektywy poznawcze, nie krępowane empirią i kierowane jedynie wolną myślą. Przed Grekami otwierał się świat nowy, w który wkroczyli z odwagą i świeżością młodych zdobywców, dokonując szybkich i zaskakujących postępów. Grecka matematyka miała dwa źródła: dziedzictwo poprzednich cywilizacji i oryginalną grecką filozofię, której dominujący wpływ sprawił, że szybko stała się wiedzą specyficzną, czysto racjonalną i autonomiczną, zasługującą na wyróżnienie osobną nazwą.

8. Nowe perspektywy: dowodzenie, definiowanie, tworzenie teorii

Przejście od konkretu do ogólności i perspektywa uzyskania wiedzy nieznanego wcześniej rodzaju było wejściem w świat całkowicie nowy, w którym już na początku pojawiły się specyficzne, wcześniej niespotykane problemy. Na plan pierwszy wysuwał się problem uzasadniania zdań ogólnych. Dawniej można się było odwoływać do naoczności czy doświadczenia, natomiast w zdaniach ogólnych kwantyfikator „każdy" takie odwołanie wykluczał. Grecy zrozumieli, że zdania ogólne wymagają innego, nowego rodzaju uzasadnienia, nie opartego na autorytecie starodawnego przekazu czy zgodności z codziennym doświadczeniem.

Pierwszym matematykiem w tym nowym rozumieniu był Tales, który nie tylko sformułował pierwsze zdania ogólne, ale i podawał ich uzasadnienia. Były one jeszcze naoczne, niemal empiryczne i mogą wydawać się naiwne: wystarczy zgiąć kartkę z kołem wzdłuż jego średnicy czy kartkę z trójkątem równobocznym wzdłuż osi symetrii trójkąta i nakładać ją na siebie wzdłuż linii zgięcia, by przekonać się o prawdziwości głoszonej tezy o równości. Naiwne czy nie, pojawiły się pierwsze twierdzenia ogólne i pierwsze dowody. Wkrótce pojawiły się kolejne twierdzenia, mniej oczywiste i z konieczności wymagające bardziej złożonych dowodów, np. twierdzenie, że chcąc mieć kwadrat dwa razy większy od danego, za bok nowego kwadratu trzeba wziąć przekątną kwadratu wyjściowego[46]. Jest rzeczą zrozumiałą, że pierwsze dowody nie zrywały całkowicie z empirią (posługiwały się rysunkiem i konkretem), a ich celem było uzyskanie naocznej pewności[47]. Tak więc chociaż przejście od konkretu do ogólności było raptowne, to wypracowanie odpowiedniej metody uzasadniania twierdzeń ogólnych zajęło Grekom parę wieków i wiązało się z pokonywaniem innych jeszcze trudności.

[45] Sokrates mówi do Teajteta: „Jak tam ich było wiele, a tyś je jedną ideą objął, tak samo i liczne rodzaje wiedzy jednym słowem nazwij", por. Platon, *Teajtet*, 148d, [w:] Platon, *Dialogi*…

[46] Dowód tego twierdzenia Platon wkłada w usta Sokratesa w dialogu *Menon*, 82c–85e, [w:] Platon, *Dialogi*…

[47] Por. analizę dowodu twierdzenia o podwojeniu kwadratu w artykule: A. Szabó, *O prewraszczenii matiematiki w deduktiwnuju nauku i naczale jejo obosnowania*, „Istoriko-matiematiczeskije issledowania" 1959, nr 12, s. 321–392.

Jest rzeczą niezmiernie interesującą, co pokazują najnowsze badania historyczne, że wczesna matematyka grecka miała charakter hipotetyczny: skupiano się na problemach, które rozważano krytycznie, a nie na twierdzeniach, które były początkowo rzadkie i też miały raczej charakter hipotez wymagających bardziej przekonującego uzasadnienia, niż twardych faktów. W owym początkowym okresie jej rozwoju nie było także wyraźnej różnicy między intuicyjnie oczywistym a logicznie dowiedzionym. Źródła pokazują, że w tym wczesnym okresie uzyskano wiele wyników, które później były na nowo i bardziej przekonująco dowodzone. Takie długie przechodzenie od oczywistości naocznego i intuicyjnego oglądu do akceptacji wyłącznie ścisłej dedukcji jako jedynej drogi dochodzenia prawdy w matematyce wydaje się zrozumiałe. Natomiast na jego dokonanie i ostateczną akceptację niewątpliwy wpływ miał kryzys wywołany pojawieniem się aporii, zwłaszcza aporii niewspółmierności. Przejście to, stanowiące ważny etap w rozwoju greckiej matematyki, stało się tak gruntowne, że historia zatarła pamięć tego, co było przed nim i w III w. p.n.e. powszechny był już obraz matematyki greckiej jako krystalicznie czystej wiedzy o niepodważalnych prawdach, utrwalony w *Elementach* Euklidesa i potwierdzony autorytetem Arystotelesa.

Istotnym elementem postępowania dowodowego w geometrii były nieznane wcześniej konstrukcje geometryczne, zaś ich użycie, poczynając od najprostszych, takich jak ustalenie środka odcinka czy poprowadzenia prostej prostopadłej do danego odcinka, wymagało dowiedzenia ich poprawności (chcąc ustalić środek danego odcinka opisujemy z jego końców półokręgi i łączymy odcinkiem punkty ich przecięcia; odcinek ten jest prostopadły do odcinka wyjściowego, a jednocześnie punkt przecięcia obu tych odcinków jest środkiem odcinka wyjściowego). Konstrukcja poprawna musiała być jednoznaczna (nie mogło być przecież dwóch różnych odpowiedzi na wyraźne, konkretne pytanie), a ta jednoznaczność musiała być poparta dowodem. Tak pojawił się nowy, nieznany cywilizacjom wcześniejszym, wymóg dokładności stosowanych konstrukcji, rozszerzony niebawem na arytmetykę i na wymóg dokładności algorytmów arytmetycznych.

W matematyce greckiej były także wyniki przybliżone, widoczne np. w postępowaniu Teona ze Smyrny podającym sposób liczbowego zbliżania się do wielkości niewymiernej. Miały one jednak charakter marginalny. Na plan pierwszy wielkości przybliżone wypłyną dopiero wiele wieków później, w matematyce nowożytnej, nie tylko w postaci przybliżonych konstrukcji rozwiązań problemów delijskich, ale także, co miało o wiele poważniejsze skutki, w arytmetyce, teorii liczb i algebrze, np. przy szukaniu wartości pierwiastka równania algebraicznego. Pojawi się wtedy matematyczne pojęcie *błędu*, a w ślad za nim *szacowanie błędu* (ocena odstępstwa od wartości ocenianej), co stanie się punktem wyjścia doniosłych przeobrażeń matematyki współczesnej. Poniekąd także i to jest dziedzictwem matematyki greckiej.

Przekonujące uzasadnienie prawdziwości twierdzeń ogólnych i poprawności konstrukcji geometrycznych musiało składać się z nie budzących wątpliwości kroków, a więc takich, w których z kolejnych przesłanek wynikały przekonująco następne. Dość szybko ten typ rozumowań Grecy wyróżnili jako *dedukcję*. Ściślej, *zasada dedukcji* głosi: jeśli uznajemy zdanie *p* i uznajemy rozumowanie prowadzące od zdania *p* do zdania *q*, to uznajemy także zdanie *q*. Zasada ta jest tak naturalna, że niewątpliwie była używana i wcześniej, ale dopiero Grecy ją wyróżnili i świadomie stosowali, a także poddali krytycznej analizie[48]. Analizując dedukcję Grecy wynaleźli *sylogizm*, który „jest jednym z najpiękniejszych wynalazków umysłu ludzkiego”[49], a ich *sylogistyka*[50] dała początek *logice*, tj. całkowicie wcześniej nieznanej nauce o poprawnym rozumowaniu.

Inną konsekwencją przejścia od konkretu do ogólności był problem jasności (jednoznacznego rozumienia) pojęć ogólnych. Już nie można się było odwoływać do naoczności i mówić, że koło jest tym, co każdy widzi. Potrzebne było wyraźne określenie, np. takie: „Koło jest figurą płaską, leżącą wewnątrz linii zwanej okręgiem i taką, że wszystkie odcinki padające na nią z pewnego punktu – są równe. A ten punkt nazywa się środkiem koła”[51].

Wyraźne określenia były niezbędne w trakcie dowodzenia. Przesłanki rozumowania musiały bowiem być jasne, a dedukcyjne wnioskowanie – przekonujące. Takie wyraźne określenia nazwano *definicjami* i w ten sposób pojawiło się określanie jednych pojęć ogólnych przez inne, czyli *definiowanie*. U Babilończyków i Egipcjan definiowania nie było i nie mogło być, bo nie było tam pojęć na wyższym poziomie ogólności. Ich wiedza bez tego się obywała, ale też brak możliwości definiowania ograniczał ją do konkretów.

Definiowanie pojawiło się wcześnie i rychło zyskało uznanie, a w czasach Platona było już dobrze zadomowione, np. Sokrates powiada, że „gdy się do sądu ogólnego dołączy ścisłe ujęcie, powstaje wiedza najdoskonalsza”, po czym następuje jeszcze rozważanie, co znaczy „ścisłe ujęcie”[52]. I w platońskich dialogach znajdujemy definicje licznych pojęć, w tym matematycznych, np. figury[53], okręgu[54], odcinka prostej[55]. Co więcej, w platońskiej filozofii definicje były bar-

[48] Arystoteles, *Topiki*, księga I, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 1, Warszawa 1990.

[49] G.W. Leibniz, *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, tłum. I. Dąmbska, Warszawa 1955 (Biblioteka klasyków filozofii, Polska Akademia Nauk, t. 17).

[50] Arystoteles, *Analityki pierwsze*, księgi I i II, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 1, Warszawa 1990.

[51] Euklides, *The Thirteen Books of Euclid Elements*, New York 1956, księga I, określenia 15 i 16.

[52] Platon, *Teajtet*, 206c, [w:] Platon, *Dialogi*…

[53] Platon, *Menon*, 75a–76b, [w:] Platon, *Dialogi*… (w przekładzie W. Wytwickiego mowa o „kształcie”).

[54] Platon, *Parmenides*, 137e, [w:] Platon, *Dialogi*… (w przekładzie W. Wytwickiego mowa o „okrągłe”).

[55] Platon, *Parmenides*, 137e, [w:] Platon, *Dialogi*… (w przekładzie W. Wytwickiego mowa o „proste”).

dzo istotne, po wyróżnieniu bowiem i nazwaniu jakiegoś obiektu czy zjawiska należało je precyzyjnie określić, czyli właśnie zdefiniować, i dopiero przy jego rozumieniu określonym taką definicją mógł stać się on czy ono cegiełką budowanej wiedzy[56].

Grecy dobrze zdawali sobie sprawę ze znaczenia dedukcji i definiowania, o czym świadczy nie tylko ich wyróżnienie, ale i metodyczna analiza dokonana przez Arystotelesa[57]. Co więcej, wcześnie dostrzegli też oni, że w budowanej przez nich dedukcyjnej wiedzy dają się wyróżnić specyficzne układy złożone z pojęć, definicji i twierdzeń, powiązanych jedynie więzami wewnętrznej konieczności. Każdy taki układ Grecy nazywali *teorią.*

Na wyróżnienie i budowanie przez Greków teorii wpłynął jeszcze jeden specyficzny czynnik, a mianowicie ich dążenie – widoczne już u Talesa i jego bezpośrednich następców – do szukania *początku*. Za tym dążeniem kryło się stare (obecne jeszcze w okresie mitologicznym) przekonanie, że początek tłumaczy i uzasadnia wszystko. U Talesa taką początkową zasadą przyrody była woda, wszystko bowiem z wody powstało i wodę zawiera, Anaksymenes (V w. p.n.e.) zamiast wody brał powietrze, a bardziej wyrafinowany Anaksymander (610–547 p.n.e.) – bezkres. Innego rodzaju pierwszą zasadę („byt jest, a niebytu nie ma"), z której wywodził wszystko, sformułował Parmenides (540–450 p.n.e.). Dążenie to do rangi najwyższej zasady kierującej poznaniem podniósł Arystoteles głosząc „wtedy bowiem sądzimy, żeśmy daną rzecz poznali, gdyśmy wyliczyli jej pierwsze przyczyny i zasady aż do ostatecznych elementów"[58].

Takie dążenie do znalezienia początku, połączone z dążeniem do budowania opartej na nim teorii, doprowadziło do skrystalizowania się koncepcji teorii aksjomatyczno-dedukcyjnej, która zaczyna się od grupy jasnych pojęć i od kilku oczywistych o nich twierdzeń (nazywanych *aksjomatami* lub *postulatami*, a później już tylko *aksjomatami*), po czym wszystkie następne pojęcia muszą być definiowane, a twierdzenia – dowodzone. Teorii aksjomatyczno-dedukcyjnych w matematyce Grecy stworzyli kilkanaście (o niektórych będzie mowa). Przykład greckiego aksjomatu: *Jeśli do nierównych ilości dodawać równe porcje, czasu lub czegokolwiek innego, to zawsze różnica będzie ta sama, która zachodziła na początku*[59].

Odkrywany przez Greków świat ogólnych myśli i specyficznych w nim procedur, takich jak definiowanie i dowodzenie, otwierał oszołamiające perspektywy budowania nowego typu wiedzy o świecie, nie empirycznej, ale racjonalnej.

---

[56] Por. Platon, *Prawa*, 895c, [w:] Platon, *Dialogi*… Por. także E.A. Maziarz, Th. Greenwood, *Greek Mathematical Philosophy*…, s. 102–103.

[57] Arystoteles, *Analityki wtóre*, rozdziały 9, 12 i 13, [w:] Arystoteles, *Dzieła*…

[58] Arystoteles, *Fizyka*, 184a, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 2, Warszawa 1990.

[59] Platon, *Parmenides*, 154b, [w:] Platon, *Dialogi*… Inną wersję tego aksjomatu zawarł Euklides w *Elementach*, por. Euklides, *The Thirteen Book*…, księga I.

Grecy z zapałem odkrywców podjęli to wyzwanie podjęli i z ich parowiekowego trudu wyszła matematyka, a jednym z fundamentalnych dzieł tej matematyki będzie jej szczególna aksjomatyczno-dedukcyjna synteza, jaką przedstawił Euklides w 13. księgach *Elementów*.

9. Matematyka według pitagorejczyków

Koncepcja racjonalnej wiedzy o świecie, opartej na idei samowystarczalności przyrody oraz na pojęciach ogólnych i poszukiwaniu początku, wyrosła w jońskiej szkole filozofii przyrody, której pierwszym i od razu wybitnym przedstawicielem był Tales. Miał on znanych w historii filozofii następców, ale rychło kres tej szkole położyła agresja Persów. Impuls został jednak wysłany i powszechnie w greckim świecie przyjęty. Następne greckie szkoły filozoficzne, które się w kilku ośrodkach pojawiły, znacznie tę koncepcję rozwinęły. Szczególnie zasłużyli się tu pitagorejczycy, którzy dokonali wielu odkryć i traktowali kultywowanie tej nowej wiedzy jako środka udoskonalania duszy, nadając jej w ten sposób najwyższą rangę. Także inne szkoły filozoficzne ówczesnej Grecji znacznie się przyczyniły do jej rozwoju. Szkół tych było kilka i nie następowały jedna po drugiej; nieraz działały równolegle, a niektóre, jak pitagorejska, oddziaływały przez kilka wieków. Wpływy tych szkół się przenikały, a każda na swój sposób sprzyjała matematyce i miała swój udział w jej rozwoju.

Szkołę filozoficzną o charakterze zamkniętej sekty założył Pitagoras z Samos (druga połowa VI w. p.n.e.), który urodził się w Jonii, a w wieku kilkunastu lat osiedlił się Krotonie w południowej Italii (Wielkiej Grecji)[60]. Orficki proces oczyszczania duszy przybrał u pitagorejczyków charakter praktyk oczyszczających ciało i kontemplacji intelektualnych, mających za przedmiot zarówno bliski świat jak i odległe gwiazdy. Praktykowanie mądrości miało prowadzić do uwolnienia od dominacji zmysłów i skupienia na intelekcie.

Jak pisał Arystoteles (384–322 p.n.e.), „pitagorejczycy pierwsi zająwszy się naukami matematycznymi nauki te rozwinęli, a zaprawiwszy się w nich sądzili, że ich zasady są zasadami wszystkich rzeczy. Skoro tedy liczby zajmują pierwsze miejsce wśród tych zasad, (…) sądzili, że elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy”[61]. Będąc istotnym składnikiem pitagorejskich dociekań, ta nowa racjonalna wiedza, skoncentrowana na badaniu liczb i figur, otrzymała od nich wspomnianą przez Arystotelesa nazwę *matematyka.* Nazwa ta ją wyróżniła, a wyróżniając dała początek jej świadomemu istnieniu i autonomicznemu rozwojowi, do czego pitagorejczycy walnie się zresztą przyczynili. Nadaniu tej nazwy

[60] Szkoła była ograniczona do wtajemniczonych i pierwsze historyczne o niej świadectwa pochodzą od późniejszych pitagorejczyków (Filolaos z Krotony, Archytas z Tarentu i inni). Wiele o pitagorejczykach pisał Arystoteles. Por. także J. Gajda, *Żywoty Pitagorasa*, Wrocław 1993; J. Gajda, *Pitagorejczycy*, Warszawa 1996.

[61] Arystoteles, *Metafizyka*, 986a, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 2, Warszawa 1990.

nie towarzyszyła definicja[62]. Pitagorejczycy określili matematykę inaczej – podając jej zakres, opisanym poniższym diagramem[63]:

	MATEMATYKA		
wielkości dyskretne		wielkości ciągłe	
absolutne	względne	stałe	ruchome
ARYTMETYKA	MUZYKA	GEOMETRIA	ASTRONOMIA

Wyróżnione przez pitagorejczyków dziedziny *arytmetyka* i *geometria* są częścią matematyki także i dzisiaj. Arytmetyka pitagorejska za przedmiot miała liczby (w ich rozumieniu liczbami były nasze liczby *naturaln*e i ich stosunki, czyli nasze liczby *wymierne dodatnie*). Różniła się jednak bardziej spekulatywnym charakterem od arytmetyki późniejszej i współczesnej, skupionej na działaniach i algorytmach. Pitagorejczycy skupiali się na badaniu rodzajów liczb wyróżnionych przedstawieniami geometrycznymi (w postaci układów kropek) oraz na badaniu średnich (arytmetycznych, geometrycznych, harmonicznych)[64]. *Geometria* pitagorejska była bardziej podobna do naszej. Jak wszyscy Grecy, także pitagorejczycy uważali, że *muzyka* oczyszcza i uwzniośla, odkrycie zaś przez nich związków między akordami a stosunkami liczb (np. skracając strunę o połowę, tj. w stosunku 1:2, otrzymujemy dźwięk wyższy o oktawę) sprawiło, że do swojej matematyki włączyli muzykę. Tak ich to odkrycie zachwyciło, że uznali liczbę za zasadę świata, bo „elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy". Opierająca się na arytmetyce i geometrii (a nawet i na muzyce, bo pitagorejczycy „słyszeli" harmonię sfer niebieskich) *astronomia* była poświęcona badaniu nieba, co wydawało się tak ważne, że później była ona nawet utożsamiana z całą matematyką i jeszcze w średniowieczu określenia „matematyk" i „astronom" uchodziły za synonimy.

Po ustanowieniu przez pitagorejczyków matematyki rychło wybiła się ona na ważne miejsce w greckiej kulturze intelektualnej, co później przejęła Europa. Dość przypomnieć, że cztery części składowe pitagorejskiej matematyki złożyły się na *quadrivium*, które w średniowieczu było, po *trivium* (gramatyka, dialek-

[62] Matematyka do dzisiaj nie posiada powszechnie akceptowanej definicji, a jej współczesny zakres opisuje *Mathematics Subject Classification 2010* – broszura wyliczająca na 110 stronicach ponad 4000 mniejszych dziedzin.

[63] Por. G.J. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Los Angeles 2012, s. 23. Diagram w: H.W. Turnbull, *The Great Mathematicians*, New York 1993 – cyt. za J.R. Newman, *The World of Mathematics*, London 1961, t. 1, s. 85.

[64] Więcej na ten temat piszą E.A. Maziarz, Th. Greenwood, *Greek Mathematical Philosophy*…, rozdziały 2 i 3.

tyka, retoryka), podstawowym składnikiem kanonu uniwersyteckich wydziałów filozoficznych. Do XIX w. wydziały te miały zresztą charakter propedeutyczny, co miało ten skutek, że każdy student uniwersytetu musiał zaliczyć wydział filozoficzny, a więc i *quadrivium*. Miało to oczywiście ogromny wpływ na kształt europejskiej kultury intelektualnej[65]. Konsekwencją tego stanu rzeczy jest i to, że także współcześnie matematyka ważne miejsce w kulturze[66] i pozostaje obowiązkowym przedmiotem nauczania we wszystkich szkołach.

10. Matematyzacja przyrody i dwie kultury

Intelektualną kuźnią cywilizacji greckiej była Akademia, założona przez Platona (428–347 p.n.e.) i funkcjonująca niemal tysiąc lat – aż do jej zamknięcia przez cesarza Justyniana w 529 r. Platon kierował nią lat czterdzieści, a Arystoteles był jej uczestnikiem lat dwadzieścia. Za ich czasów licznie napływali do niej uciekający z Kretony pitagorejczycy.

W środowisku Akademii matematyka zajmuje ważne miejsce i jej znaczenie dla poznawania świata, a w szczególności pytanie, czym są jej obiekty. Dla Platona obiekty te były czymś pośrednim między światem materii a światem czystych idei, ale w burzliwych dyskusjach przeważył (jeszcze za czasów Platona) pogląd Speuzypa, że obiekty matematyczne są czystymi platońskimi ideami. Uznanie obiektów matematycznych za niezmienne i ponadczasowe idee, istniejące w idealnym świecie, niebywale podnosiło status badającej je matematyki.

Akademia podjęła myśl pitagorejczyków przeniknięcia świata rozumem w oparciu o matematykę, co można nazwać *programem matematyzacji przyrody*. Mimo różnych losów tego programu (np. Arystoteles akceptował go w strefie nadksiężycowej, ale nie w podksiężycowej), a okresami wręcz jego zanikania, program ten nigdy nie zanikł całkowicie, a w naszych czasach jest nadal celem naukowego przyrodoznawstwa.

Wyróżnienie i awans matematyki był jednak rozejściem się dwóch dróg poznawania świata. Odtąd bowiem w krytycznej (naukowej) refleksji nad światem można wyróżnić dwie wielkie tradycje. Jedną można nazwać tradycją *metafizyczną* i rozumieć jako dążenie do zrozumienia świata w sensie docierania do *istoty* obserwowanych w nim bytów i zjawisk. W ślad za Arystotelesem metafizycy opisują świat w terminach materii i formy, istoty i przypadłości, przyczyny i skutku, biorąc te słowa z języka potocznego, ale używając ich w nowym, metafizycznym znaczeniu. W tej tradycji matematyka znajdowała się na dalszym planie, a hołdujące jej przyrodoznawstwo było amatematyczne. Przykładem fizyka Arystotelesa z jego koncepcją ruchów naturalnych i wymu-

[65] Por. A.N. Whitehead, *Nauka i świat nowożytny*, tłum. M. Kozłowski, M. Pieńkowski OP, Kraków 1987, a w szczególności rozdział *Matematyka jako element w historii myśli*, s. 44–66.

[66] A.L. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa 1983.

szonych, w której istotą ruchu każdego ciała jest jego dążenie do zajęcia „naturalnego" miejsca[67].

Zwolennicy drugiej tradycji, nazwijmy ją *matematyczną*[68], uważali, że nawet bez znajomości *istoty* obserwowanych obiektów czy zjawisk możemy sensownie je opisywać, ujmując ich przejawianie się w kategoriach matematycznych. Nie zadajemy zatem pytania „co to jest?" (jaka jest istota?), ale zadowalamy się opisem „jak to działa (przejawia się, funkcjonuje)?". Bodaj pierwsi wystąpili w tym duchu pitagorejczycy postulując opisywanie świata w oparciu o liczbę, jako że „elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy". W duchu tej tradycji Isaac Newton (1642–1727) nie dociekał istoty *grawitacji*, ale skutecznie opisał[69] wszystkie ruchy mechaniczne świata, od spadania jabłka na Ziemię po obroty ciał niebieskich (przy okazji przezwyciężając podział świata na dwie strefy). Dzisiejsza fizyka też nie docieka istoty takich pojęć jak *materia*, *siła*, *elektryczność* itp., ale mimo to niezwykle skutecznie opisuje świat materialny.

Obie tradycje różnią się zasadniczo. Można powiedzieć, że zwolennicy tradycji metafizycznej stawiają sobie cele bardziej ambitne, ale w obliczu nieprzezwyciężalnych trudności w dotarciu do istoty zatrzymują się bezradni. Z pozoru skromniejsi, zwolennicy tradycji matematycznej okazują się w wielu przypadkach bardziej skuteczni. Co więcej, uzyskiwane przez nich wyniki mogą rodzić nadzieję na zbliżanie się do poznania istoty.

W następnych wiekach nastąpiło rozdwojenie tradycji matematycznej na dwa nurty. Filozofowie orientacji platońskiej uważali matematykę za z góry zadaną i nakładali obiekty i struktury matematyczne na przyrodę, np. istnienie tylko 5 brył platońskich uznali za istotne odkrycie przyrodnicze i utożsamiali te bryły z 5 podstawowymi pierwiastkami (ziemi, wody, powietrza, ognia i „kwintesencji"). Było to stanowisko aprioryczne, ale można postępować inaczej, aposteriorycznie, zaczynając od świata (a nie od matematyki) i dostosowywać opis matematyczny do rzeczywistości. W starożytności wzorem takiego postępowania był Archimedes (287–212 p.n.e.), a przykładem jego prawo wyporności (jest to jedna z dwóch prac z fizyki, które powstały w starożytności i do dzisiaj zachowały znaczenie), później zaś Newton i współcześni uczeni. Tradycja matematyczna (w obu znaczeniach) dała jednak początek *nauce* (w sensie *science*), ale współcześnie dominuje tradycja archimedejska.

---

[67] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 2, Warszawa 1990, zawierający Fizykę i inne traktaty.

[68] Bardziej właściwa byłaby tu nazwa *scientific tradition*, ale język polski tłumaczyłby to jako *tradycja naukowa,* co oczywiście byłoby zbyt szerokie (język polski wspólną nazwą *nauka* obejmuje zachodnie *science* i *lettres*, a nam chodzi tylko o *science*).

[69] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687. Dzieło jest dostępne po polsku: I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, tłum. J. Wawrzycki, Kraków 2011.

Te rozstaje, przed którymi stanęli starożytni Grecy, a potem poszli bądź za „metafizykami" bądź za „matematykami", leżą u początku „dwóch kultur"[70], dających uzupełniające obrazy świata, ale słabo się rozumiejących i komunikujących.

11. Eleackie aporie

Wracając do matematyki przypomnijmy, że Talesowi i jońskiej filozofii przyrody zawdzięczamy przejście „od konkretu do ogólności". Pierwsze ogólne twierdzenia i początek dowodzenia, a Pitagorasowi i pitagorejczykom zawdzięczamy nazwę „matematyka" i pierwsze określenie jej zakresu. Ten zakres później ewoluował (do dziś nie jest precyzyjnie określony), jednakże istotne znaczenie miało wyróżnienie matematyki jako specyficznej dziedziny wiedzy oraz liczne odkrycia w jej zakresie (o niektórych będziemy mówić). Uznanie przez pitagorejczyków matematyki za drogę do uszlachetnienia duszy i poznania idealnego świata nadało jej wysoki status społeczny.

Kolejną grecką szkołą filozoficzną, której matematyka wiele zawdzięcza, byli *eleaci*. Szkoła ta wzięła nazwę od miasta Elea w południowej Italii, gdzie działali. Jej założycielem był Ksenofanes (ok. 580 – ok. 480 p.n.e.), który także przybył do Elei z Azji Mniejszej. Jednakże za właściwego jej twórcę uchodzi Parmenides (ok. 540 – ok. 450 p.n.e.), dla którego celem propagowanej przez niego mądrości było odkrywanie prawdziwego świata ukrytego za zasłoną zmysłów i codziennego doświadczenia. Odrzucając świadectwo zmysłów, a głosząc pierwszeństwo czystej myśli, świadomie i systematycznie stosował rozumowanie dedukcyjne, co tworzyło atmosferę sprzyjającą rozwojowi matematyki, którą eleaci też się zajmowali. W następnym pokoleniu wybitnym ich przedstawicielem okazał się Zenon z Elei (490–430 p.n.e.)[71]. Urodzony polemista, Zenon oparł się na *dialektyce*. Za jego czasów była to szeroko już praktykowana sztuka rozważania kontrowersyjnych pytań i poglądów drogą ich zestawiania i poddawania krytycznemu osądowi. Szeroko stosowali ją później sofiści i Sokrates (470–399 p.n.e.) (por. dialogi platońskie), ale wcześniej tak udoskonalił ją Zenon, że Arystoteles uznawał go nawet za ojca dialektyki. Zdania, do których odnosiły się rozważania dialektyczne, były na ogół nazywane *hipotezami*, chociaż w użyciu były i nazwy

[70] Por. C.P. Snow, *Dwie kultury*, tłum. T. Baszniak, Warszawa 1999.

[71] Pierwszym, który wysunął tezę o istotnym wpływie Zenona z Elei na rozwój greckiej matematyki był B.L. van der Waerden, *Zeno und die Grundlagen Krise der griechischen Mathematik*, „Mathematische Annalen" 1940, nr 117, s. 141–161. Niezależnie od van der Waerdena genetyczne związki między dialektyką eleatów a matematyką pitagorejczyków badał Árpád Szabó (1913–2001) publikując na ten temat (w latach 50. i 60. XX w.) serię prac, w tym A. Szabó, *Die Philosophie der Eleaten und die Mathematik der Griechen*, „La Parola del Passato. Rivista di Studi Antichi" 1988, nr 48, s. 420–445, oraz podsumowując wyniki swoich dociekań w książce: Á. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest 1978 (angielski przekład: *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht).

bardziej specyficzne jak *homologema* (umowa, ugoda) czy *aitema* (inne żądania), ale te ostatnie zastępowano potem terminem *postulaty*[72].

Największą sławę przyniosły Zenonowi jego *aporie.* Greckie słowo „aporia" oznacza pytanie, problem, trudność. W szczególności mamy z aporiami do czynienia, gdy w odpowiedzi na jakieś pytanie występują odpowiedzi wzajemnie sprzeczne, ale każda w jakiś sposób zasadna. Takie aporie ujawniają jakieś istotne trudności i stąd bywają też nazywane *paradoksami*. Zenon sformułował ich kilka[73], a do najbardziej znanych należą aporia *Achillesa i żółwia* oraz aporia *strzały*. Ta pierwsza mówi, że szybkonogi Achilles nigdy nie dogoni powolnego żółwia, bo kiedy dobiegnie do miejsca, w którym żółw był na początku gonitwy, ten się już odsunie, a kiedy Achilles dobiegnie do następnego, żółw znów się odsunie, i tak dalej w nieskończoność, ten proces nigdy się nie skończy. Ta druga z kolei mówi, że wystrzelona z łuku strzała nie porusza się, w każdej bowiem chwili znajduje się w jakimś miejscu, a więc w każdej chwili znajduje się tam w spoczynku, a że czas składa się z chwil, to strzała cały czas jest w spoczynku. Innej oczywiście odpowiedzi na obie te aporie dawało codzienne doświadczenie, a więc ich ostrze kierowało się na rozdźwięk między doświadczeniem a próbami jego racjonalnego wyjaśnienia.

Do dziś trwają spory, jak właściwie należy interpretować aporie Zenona[74]. Niewątpliwie jednak Zenon dostrzegał trudności związane z posługiwaniem się w matematyce takimi pojęciami jak ruch, mnogość i nieskończoność. U korzeni aporii Zenona leży matematyczna nieskończoność, a ściślej, kontrast między skończonym a nieskończonym, kontrast między matematyką odwołującą się do nieskończoności a codziennym doświadczeniem, gdzie wszystko jest skończone i Achilles szybko dogoni żółwia. Aporie te wskazują także, że pojęcie mnogości, też potrzebne w opisywaniu rzeczywistości (czas jest mnogością chwil), kryje w sobie zasadzki (w świecie fizycznym strzała jest w ruchu). Nie są to więc tylko błyskotliwe paradoksy, ale właśnie trudności uwidaczniające trudne problemy, z jakimi matematyka się borykała, a mianowicie problem nieskończoności, problem ruchu i problem mnogości. Trudności istotne, problem ruchu czekał bowiem dwa tysiące lat na zadowalający opis matematyczny (aż do wprowadzenia przez Leibniza pojęcia funkcji i wynalezienia przez Newtona i Leibniza (1646–1716) rachunku różniczkowego i całkowego), a problemy mnogości i nieskończoności świadomie podjęła dopiero teoria mnogości Georga Cantora (1845–1918).

---

[72] A. Máté, *Árpád Szabó and Imre Lakatos. On the relations between history and philosophy of mathematics*, „Perspectives of Science" 2006, t. 14, nr 3, s. 291.

[73] Głównym źródłem wiedzy o paradoksach Zenona jest: Arystoteles, *Fizyka*, 239b–240a, [w:] Arystoteles, *Dzieła...* Ciekawego omówienia tych paradoksów dokonuje Th.L. Heath, *A History*…, s. 271–283.

[74] Por. A. Máté, *Árpád Szabó and Imre Lakatos. On the relations between history and philosophy of mathematics*, „Perspectives of Science" 2006, t. 14, nr 3, s. 291. E.A. Maziarz, Th. Greenwood, *Greek Mathematical Philosophy*…, rozdział 6.

Eleaci nie rozstrzygnęli żadnej z tych wielkich aporii. Ich wielką zasługą jest jednak to, że się ich nie ulękli i nie cofnęli matematyki do stanu *quo ante*, z okresu babilońskiego czy egipskiego, w którym nie mogłyby się one pojawić i nikogo by zatem nie zaniepokoiły. Rozważając je krytycznie, wyostrzyli niektóre związane z nimi pojęcia, w tym pojęcie nieskończoności, co później pozwoliło Grekom na zajęcie pragmatycznego stanowiska w tej sprawie.

Zachwyceni siłą rozumowań racjonalnych, ale niewątpliwie także pod wpływem aporii Zenona, Eleaci zajęli stanowisko anty-empiryczne, wrogie intuicji, także w ten sposób wydatnie się przyczyniając do wzmocnienia trendu racjonalnego w filozofii, w którym matematyka doskonale się odnajdywała. Aporie Zenona, do których niebawem dołączyły następne z innych szkół, nie tylko nie zatrzymały rozwoju greckiej matematyki, ale nawet w pewien sposób rozwój ten pobudzały, skupiając uwagę matematyków na specyficznych trudnościach i zmuszając do podejmowania prób uporania się z nimi.

Do rzędu aporii należy też odnieść *problem ciągłości*[75]. Świat wokół nas jest pełen zjawisk i obiektów ciągłych. Ciągły jest czas, ale ciągła jest także droga, którą przebywamy i brzeg, który ogranicza morze. Ciągłym obiektem matematycznym jest linia i Grecy uznawali, że *linia* może zawierać punkty, ale pojęcie *punktu* stanowiło dla nich trudność. Pitagorejczycy uważali, że linię wypełniają punkty jako monady. Platon zaś odrzucał tę koncepcję, bo monada ma położenie i objętość. Pojęcie punktu było jednak potrzebne i Platon dopuszczał punkt jako początek linii (co jednak odrzucał Arystoteles). Linia według Greków daje się dzielić w nieskończoność, dochodząc do niepodzielnych części. Platon nie uznawał linii jako układu punktów i nie identyfikował niepodzielnych części z punktami. Koncepcje punktu i linii były więc niejasne i późniejsi matematycy greccy próbowali je wyjaśnić. Ich wysiłki szły w kierunku elementów niepodzielnych i liczb infinitezymalnych (dodatnich, ale mniejszych od każdej liczby rzeczywistej), nie doprowadziły jednak do zadowalającego wyniku.

Problem ciągłości został ostatecznie wyjaśniony dopiero w XIX w., kiedy powstały nowożytne teorie liczb rzeczywistych, a w szczególności teoria przekrojów Dedekinda (1831–1916), w której liczby niewymierne są wyznaczane przez *luki*[76]. Matematycy współcześni nie pamiętają już o greckich niepodzielnych i infinitezymalach, bez oporu przyjmując, że linia (i każdy inny obiekt geometryczny) jest układem punktów. W szczególności, uprawomocnienie liczb niewymiernych i utożsamienie liczb rzeczywistych (wymiernych i niewymiernych) z punktami prostej umożliwiło arytmetyzację geometrii, a w konsekwencji i wiedzy o świecie.

[75] Uwagi poniższe oparte są na książce E.A. Maziarz, Th. Greenwood, *Greek Mathematical Philosophy*…, s. 112–115.

[76] R. Dedekind, *Stetigkeit und die Irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872.

12. Aporia niewymierności

Odkrycie przez pitagorejczyków *niewspółmierności* boku i przekątnej kwadratu, czyli tego, że bok i przekątna kwadratu nie mają wspólnej miary, której obie byłyby krotnościami[77], czyli aporia *niewymierności*, wstrząsnęła filozofią pitagorejską i doprowadziła matematykę grecką do kryzysu.

Rozumowanie, prowadzące do tej aporii, jest proste[78]. Przyjmijmy mianowicie, że taka wspólna miara dla boku a kwadratu i jego przekątnej c istnieje. Oznaczając ją przez d wnosimy zatem, że skoro jest ona wspólną miarą dla a i c, to $a = nd$ i $c= md$ dla pewnych całkowitych n i m. Zatem stosunek przekątnej c do boku a wyraża się liczbą m/n (= c/a). Możemy przyjąć, że ułamek m/n jest nieskracalny (gdyby był skracalny, to dokonalibyśmy tylu skróceń, ile trzeba, by doprowadzić do postaci nieskracalnej). Wiadomo, że kwadrat zbudowany na przekątnej kwadratu ma pole 2 razy większe od pola kwadratu zbudowanego na jego boku, a zatem $2n^2 = m^2$. Z tej równości wynika, że m^2 jest liczbą parzystą, a zatem samo m też musi być liczbą parzystą, czyli $m = 2k$ dla pewnego k. Wstawiając tę wartość do poprzedniej równości dostajemy $2n^2 = (2k)^2$, czyli $n^2 = 2k^2$, a więc także n^2 jest liczbą parzystą, a w konsekwencji i samo n. Obie liczby m i n są więc parzyste, a zatem ułamek m/n był skracalny, co stanowi sprzeczność z założeniem.

Ponieważ dla pitagorejczyków liczbami były tylko liczby *naturalne* (całkowite dodatnie) oraz ich ilorazy, czyli nasze liczby *wymierne dodatnie*, więc ta niewspółmierność oznaczała, że stosunek przekątnej kwadratu do jego boku nie był dla nich liczbą. Musiało to budzić uczucia mieszane. Z jednej strony budziło niewątpliwy zachwyt nad siłą rozumowania, które pozwoliło odkryć własność będącą całkowicie poza zasięgiem naoczności i empirii, z drugiej strony także lęk. Odkrycie to kwestionowało bowiem naczelną tezę pitagorejskiej filozofii, zgodnie z którą „elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy". Przeważał zachwyt, lecz nie chcąc się jednak wyrzec swojej naczelnej tezy, utajnili swoje odkrycie. Pitagorejczyk Hippasus, który zdradził tę i inne ich tajemnice, miał zostać ukarany przez bogów śmiercią w katastrofie morskiej[79].

Zjawisko niewspółmierności dwóch wielkości, odkryte w stosunku przekątnej kwadratu do jego boku (dla nas ten stosunek wyraża się liczbą „niewymierną", którą oznaczamy $\sqrt{2}$), był więc dla Greków aporią, z którą musieli coś zrobić, jeśli nie chcieli wyrzec się wysokiej roli matematyki. Nie pomogło jej utajnienie, odkrycie niewspółmierności tego stosunku stało się bowiem szybko znane (pisze

[77] W istocie przypisanie pitagorejczykom tego odkrycia pojawiło się w źródłach późno, por. L. Russo, *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna*, tłum. I. Kania, Kraków 2005 (odsyłacz 17 na s. 52), ale w braku innych hipotez idziemy tu za tradycją.

[78] Przytacza je Arystoteles, *Analityki pierwsze*, księga I, 23, 41a i w nieco innej formie Euklides, *Elementy*, księga X, tw. 117.

[79] Więcej o Hippasosie i jego niedyskrecjach pisze B.L. Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, t. 1, Basel-Stuttgart 1968, s. 177–179.

o tym Platon, jednocześnie wypominając „śmieszną i komiczną niewiedzę" w tym zakresie[80]). Co więcej, Theodoros z Cyreny (zm. ok. 390 p.n.e.) pokazał, że także inne wielkości (w naszym oznaczeniu $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{17}$) są niewymierne[81], a zatem zjawisko nie było jednostkowe, lecz miało znacznie szerszy zasięg. Na dużą skalę tego zjawiska wskazywały też Grekom także inne problemy geometryczne, np. problemy delijskie, z którymi bezskutecznie się mocowali.

Pojawienie się tej aporii znamionowało więc kryzys filozoficzny. Ujawniła ona bowiem istotną przeszkodę w dążeniu Greków do racjonalizacji obrazu świata poprzez oparcie go o matematykę i jej podstawową zasadę tj. liczbę, co było istotnym problemem filozofii Platona i Arystotelesa. A także kryzys matematyczny, gdyż ujawniła bowiem w matematyce wielkości nie dające się wyrazić liczbą (w jej ówczesnym rozumieniu), zmuszając do innego ich określenia matematycznego. Był to kryzys tym poważniejszy, że ta aporia leżała na styku najważniejszych działów matematyki, arytmetyki i geometrii (liczby są domeną arytmetyki, a kwadrat i jego przekątna należą do geometrii) oraz blisko dychotomii skończoność-nieskończoność (rozpatrujemy bowiem stosunek dwóch wielkości skończonych, natomiast próby liczbowego przybliżenia tego stosunku wymagały posłużenia się nieskończonymi ciągami liczb). Ściślej, Teon ze Smyrny wymyślił dwa ciągi liczb, liczby „boczne" i liczby „przekątniowe", których stosunki przybliżają $\sqrt{2}$. Oba jego ciągi, oznaczane $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$, zaczynają się od 1 ($b_1 = 1 = c_1$), a następne ich wyrazy oblicza się ze wzorów[82] $b_{n+1} = b_n + c_n$ i $c_{n+1} = 2b_n + c_n$.

Użyte w opisie tej aporii słowo „kryzys" wyraża bardziej współczesne jej postrzeganie niż ówczesny stan greckich umysłów. Jej ujawnienie nie prowadziło do zakwestionowania statusu matematyki czy szczególnie burzliwych dyskusji. Owszem, był to poważny problem i matematycy greccy podejmowali poważne wysiłki dla uporania się z nim, ale nie burzył on ich głębokiej już wtedy wiary w solidność i rzetelność matematyki oraz jej roli w racjonalnym objaśnianiu świata.

Wyjścia z tego pierwszego w dziejach matematyki kryzysu próbowano w różnych kierunkach. Przede wszystkim kontynuowano badania nad samą niewymiernością próbując jakoś zbliżyć się do niej liczbowo, a więc poszukiwano wymiernych przybliżeń niewymierności. W innych badaniach aporii niewspółmierności wyróżnił się Teajtet z Aten (uczeń Teodorosa), który „podał ścisłe dowody twierdzeń dotyczących teorii niewymierności"[83]. Jego wyniki były kopiowane

[80] Platon, *Prawa*, 819 d, [w:] Platon, *Dialogi*…

[81] Platon, *Teajtet*, 147d–148b, [w:] Platon, *Dialogi*… W istocie Teajtet pokazuje ogólnie, że pierwiastki z liczb „podługowatych", czyli nie będących kwadratami, są niewymierne. Przekład W. Witwickiego jest w tym miejscu niejasny, tłumacz nie rozumiał, o co tu chodzi.

[82] Euklides, *The Thirteen Books*…, księga II, tw. 10.

[83] Pappus Alexandrinus, *La Collection Mathématique*, Paris 1933, s. 34. Cyt. za J.E. Maziarz, Th. Greenwood, *Greek Mathematical Philosophy*…, s. 77.

przez następców, a ostatecznie znalazły się w *Elementach* Euklidesa, gdzie zostały systematycznie wyłożone[84]. Jeszcze innym wyjściem z kryzysu było zbudowanie przez Eudoksosa (ok. 406 – ok. 355 p.n.e.) geometrycznej teorii stosunków, pozwalającej na matematycznie ścisłe (ale nie liczbowe) traktowanie niewspółmierności, również wyłożonej przez Euklidesa niemal bez modyfikacji[85]. Długo nie rozumiana teoria stosunków została doceniona dopiero w XIX w., kiedy Felix Klein (1849–1925) nazwał ją „perłą myśli antycznej", a Richard Dedekind (1831–1916) i Karl Weierstrass (1815–1897) inspirowali się nią przy budowaniu swoich teorii liczb rzeczywistych. Dopiero te ostatnie teorie, nadające wielkościom niewymiernym solidny status liczb (tzw. *niewymiernych*), pozwoliły skutecznie uporać się z aporią niewspółmierności. Było to jednak ponad dwa tysiące lat po jej odkryciu przez Greków.

Intensywne i różnorodne wysiłki matematyków greckich, zmierzające do uporania się z aporią niewspółmierności, miały i ten dalekosiężny skutek, że w ich toku wcześniejsza matematyka, w dużym jeszcze stopniu hipotetyczna, intuicyjna i niemal naoczna, przeobraziła się w wiedzę ścisłą, opartą na przesłankach, które z dużym trudem wyłaniano i uznawano za niepodważalne (później zyskały one rangę aksjomatów i postulatów) i na ścisłej dedukcji, prowadzącej od tych przesłanek do niepodważalnych już twierdzeń. Dzięki temu matematyka wychodziła z tego kryzysu obronną ręką, uzyskując nadto status *wiedzy pewnej*.

Nasuwa się tu analogia z kryzysem podstaw matematyki z przełomu XIX i XX w., kiedy to pojawiło się kilka paradoksów dotyczących powstającej wówczas teorii mnogości oraz mający im zaradzić aksjomat wyboru, który okazał się z jednej strony niezbędny, więc nieusuwalny (podobnie jak nieusuwalna była niewspółmierność), a z drugiej paradoksalny, prowadzący bowiem do wniosków sprzecznych z intuicją[86] (podobnie jak sprzeczna z intuicją była niewspółmierność). Podobnie jak w czasach greckich, wyjścia z tego kryzysu szukano w rygoryzacji matematyki, tj. w zaksjomatyzowaniu teorii mnogości i w nacisku na ścisłość rozumowań[87].

Rozważając odkrycie niewspółmierności boku kwadratu i jego przekątnej w duchu dialektyki, pitagorejczycy doszli też do przekonania, że rozumowanie wykazujące tę niewspółmierność nie jest tylko aporią, lecz jest to *sui generis* dowód, a nawet, że kryje się w nim ogólna metoda *dowodzenia nie wprost*, tzw. dowody przez *reductio ad absurdum* lub *a contrario*: jeśli ze zdania p wynika

---

[84] Euklides, *The Thirteen Books…*, księga X.

[85] Euklides, *The Thirteen Books…*, księga V.

[86] Jednym z takich wniosków jest *paradoksalny rozkład kuli,* odkryty w 1924 r. przez S. Banacha i A. Tarskiego. Mówi on, że kulę o promieniu 1 można rozłożyć na skończenie wiele części, z których da się złożyć dwie takie same kule, por. S. Wagon, G. Tomkowicz, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge 1985.

[87] Por. R. Duda, *Kłopotliwy aksjomat wyboru*, [w:] *Oblicza filozofii w nauce*, red. P. Polak, J. Mączka, W.P. Grygiel, Kraków 2017, s. 29–50.

zdanie *non p*, to *non p* (w tej aporii *p* jest zdaniem „stosunek przekątnej i boku kwadratu jest liczbą"). W ten sposób została odkryta i zyskała w matematyce status obywatelstwa nowa, potężna metoda dowodzenia, często potem przez Greków (i oczywiście później) stosowana, np. w dowodzie twierdzenia o nieskończoności zbioru liczb pierwszych. Był to kolejny silny bodziec do odrzucenia intuicyjnego oglądu rzeczywistości, torujący drogę filozofii platońskiej świata bytów idealnych i dalszemu rozwojowi matematyki.

Były jednak i negatywy. W starożytnej Grecji aporia niewspółmierności, z którą ich arytmetyka nie potrafiła sobie poradzić, natomiast geometria, która była jej źródłem, poradziła sobie całkiem dobrze z pomocą geometrycznej teorii stosunków Eudoksosa – miała i ten skutek, że spowodowała oddalenie się geometrii od arytmetyki i skupienie uwagi matematyków na geometrii z niemal całkowitym poniechaniem arytmetyki jako domeny kupców i kramarzy. Nie przypadkiem więc dalszy rozwój matematyki aż do czasów nowożytnych koncentrował się na geometrii, spychając arytmetykę do poziomu prostych rachunków, użytecznych w życiu codziennym, ale nie w sferze ducha.

13. Aporia nieskończoności

W aporiach Zenona poczesne miejsce zajmował problem nieskończoności. Uznanie nieskończoności za dopuszczalną wydawało się pociągać stwierdzenie, że szybkonogi Achilles nie jest w stanie dogonić wolnego żółwia. Na tak daleko idący rozbrat z rzeczywistością nie mogło być oczywiście zgody, ale z drugiej strony nieskończoność nie dawała się już z matematyki usunąć.

Problem nieskończoności rozwiązał Arystoteles w oparciu o swoją metafizykę, w której istotnym elementem było rozróżnienie *możności* i *aktu*. Bryła marmuru jest możnością posągu, ale wykuty z niej posąg jest już aktem. Istotną cechą otaczającego nas świata jest zmiana, ruch. Każdy ruch, zarówno zmiana położenia jak i wzrost rośliny czy zwierzęcia, jest nieustannym przechodzeniem od możności do aktu. Widziana w tej perspektywie nieskończoność jest takim właśnie dążeniem. Są okręgi o promieniu skończonym, ale nie ma okręgu o promieniu nieskończonym i podobnie nie ma nieskończoności *aktualnej*, bo jest to pojęcie, które prowadzi do sprzeczności (Achilles nie dogoni żółwia). Istnieje natomiast nieskończoność w postaci dążenia: możemy rysować okręgi o coraz większym promieniu, możemy przedłużać odcinki dokładając nowe, możemy powiększać rozważane zbiory liczb dołączając do nich nowe liczby – i możemy to wszystko robić nieograniczenie. To jest właśnie nieskończoność *potencjalna*. Zdaniem Arystotelesa, matematycy innej nie potrzebują[88]. Jego

[88] Arystoteles, *Fizyka*, 207b, [w:] Arystoteles, *Dzieła*...: „Pogląd nasz nie pozbawia bynajmniej matematyków ich teorii przez odrzucenie aktualnego istnienia nieskończoności […]. Bo w rzeczywistości niepotrzebna jest im nieskończoność, ani też z niej nie korzystają".

autorytet narzucił ten punkt widzenia matematyce greckiej, a w konsekwencji także matematyce późniejszej. Przykładem obchodzenia trudności w posługiwaniu się pojęciem nieskończoności aktualnej jest twierdzenie o nieskończoności zbioru liczb pierwszych, któremu Euklides nadał postać: *Liczb pierwszych jest więcej niż jakakolwiek zadana ich (skończona) ilość*[89]. I dowodził nie wprost: gdyby $p_1, p_2, \dots, p_n$ były wszystkimi liczbami pierwszymi, to liczba $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, która nie dzieli się bez reszty przez żadną z nich – też musiałaby być pierwsza. Sprzeczność.

Nieskończoność *potencjalna* jest jednak właściwie skończonością: rozważane obiekty geometryczne muszą mieć skończone rozmiary (u Greków nie istniała więc prosta nieskończona, a jedynie skończone odcinki), i podobnie – rozważane klasy liczb czy obiektów muszą być skończone. Jednakże wszystkie te obiekty czy klasy możemy powiększać, a więc np. odcinki przedłużać, a do klas dołączać następne elementy. Nieskończoność *aktualna* jest natomiast nieskończonością *in toto*. Nieskończona aktualnie jest prosta nieskończona i nieskończony aktualnie jest zbiór wszystkich liczb naturalnych.

Kiedy mówimy „każdy trójkąt" – tak mówił już Tales, a za nim inni matematycy greccy, to oczywiście tych trójkątów jest nieskończenie wiele (nieskończoność aktualna), ale myślą ogarniamy tylko skończoną ich ilość (nieskończoność potencjalna). To więc Grekom nie wadziło, a zresztą nie używali *explicite* kwantyfikatora „każdy".

Z nieskończonością (potencjalną) mamy też do czynienia w *metodzie wyczerpywania*, greckiej metodzie obliczania pól i objętości, służącej matematyce aż do odkrycia rachunku całkowego w XVII w. Polega ona na tym, że chcąc np. obliczyć pole koła wpisujemy w to koło wielokąty (dla prostoty rachunków, wielokąty foremne), które je wypełniają i których pola (które umiemy obliczać) przybliżają pole koła. Metodę tę zapoczątkował Antyfon, później rozwijali inni, m.in. stosując także wielokąty opisane, ścisłą zaś jej formę nadał Eudoksos. Znalazła się ona w *Elementach* Euklidesa, a po mistrzowsku stosował ją Archimedes.

14. Dialektyczne korzenie

Niedawne badania nad eleatami, a w szczególności uwydatnienie roli praktykowanej przez nich *dialektyki* sprawiły, że pojawił się pogląd, iż matematyka w swoim kształcie teorii aksjomatyczno-dedukcyjnej, w jakim przedstawił ją Euklides, ma początki dialektyczne. Jeden z ważkich argumentów za tym poglądem stanowi okoliczność, że nazwy wyrażeń *archai*, leżących u podstaw takiej teorii (postulaty, aksjomaty, definicje), mają pochodzenie dialektyczne, a same

[89] Euklides, *The Thirteen Books…*, księga IX, tw. 20.

postulaty i aksjomaty są reakcją na aporie Zenona[90], późniejsza zaś aksjomatyzacja greckiej matematyki była długim, trwającym półtora wieku procesem[91]. Ślady tego procesu dostrzega Szabó jeszcze u Platona, m.in. w tej wypowiedzi Sokratesa, w której sugeruje on, że początkowe pojęcia i tezy matematyczne są tylko hipotezami przyjmowanymi w tym celu, by zbadać ich konsekwencje[92]. Platoński Sokrates nie wyklucza ich odrzucenia, jak nie wykluczali tego pierwsi matematycy, o czym w III w. p.n.e. za czasów Euklidesa już jednak nie pamiętano. W szczególności, Arystoteles uważał już owe początkowe pojęcia i tezy za niepodważalne prawdy.

W początkowym okresie rozwoju matematyki greckiej nie zaczynano jednak od *prawdy*, lecz od *problemu*. Problemami były zdania, które należało dowieść lub obalić, problemami były też *aporie*, z którymi należało się uporać. Jak od filozofii jońskiej wyszedł bodziec (ogólne pojęcia, twierdzenia i dowodzenie), który spowodował wyłonienie się pitagorejskiej *matematyki*, tak filozofia eleacka sprawiła, że w tej matematyce nabrała mocy tendencja do ujmowania jej w karby *teorii*, opartej na niepodważalnych aksjomatach i niepodważalnym rozumowaniu dedukcyjnym, czyli teorii *aksjomatyczno-dedukcyjnej*. Nie było to obce Jonom (por. teorię Talesa, że wszystko jest z wody), bardziej jednak ważki impuls wyszedł od Parmenidesa, który głosił jedność bytu i z tej zasady wyprowadzał dedukcyjnie wnioski, oraz od aporii Zenona, dla usunięcia których potrzebne były nowe środki. Tak zaczął się ruch w kierunku wyłonienia w matematyce prawd niepodważalnych, na których można było z pełnym zaufaniem oprzeć prawdy dalsze. Oprzeć czyli wydedukować, a w ten sposób stworzyć teorię aksjomatyczno-dedukcyjną.

Wpływ na ten ruch mogła też mieć praktyka sądowa greckich *polis*, gdzie ścierały się strony, a sędzia ogłaszał wyrok. Problemem był tu przedmiot sporu, argumenty powinny były być wyraźne i zrozumiałe, a wywody przekonujące – po takim poprawnie przeprowadzonym przewodzie sądowym wyrok nabierał mocy twierdzenia[93].

Ruch zmierzający do przekształcenia matematyki w uporządkowaną teorię trwał jakieś półtora wieku. Niewiele o nim wiemy poza końcowym rezultatem, które go zakończyło. Eklektyczne dzieło Euklidesa *Elementy* wchłonęło w siebie wszystkie wcześniejsze osiągnięcia tego ruchu i okazało się tak wspaniałe, że

[90] Á. Szabó, *Anfänge des euklidischen Axiomensystem*, „ Archive for History of Exact Sciences" 1960, t. 1, nr 1, s. 97–106. Por. także A. Máté, *Árpád Szabó and Imre Lakatos. On the relations between history and philosophy of mathematics*, „Perspectives of Science" 2006, t. 14, nr 3, s. 282–301.

[91] Á. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest 1978, rozdziały 3.5 i 3.6.

[92] Platon, *Państwo*, 510c, [w:] Platon, *Dialogi*… Także w *Fedonie*, 107b – Sokrates poucza Somiasza, że „i te pierwsze założenia […] potrzeba rozpatrzyć jaśniej".

[93] Ten aspekt nie był jednak przez historyków matematyki dotychczas badany.

skutecznie zepchnęło je w cień, jeszcze w starożytnej Grecji zacierając pamięć o jego uczestnikach i towarzyszących im rozterkach.

15. Wpływy atomistów

Do ważnych greckich szkół filozoficznych należeli także *atomiści*. Dawniejsi historycy matematyki mało uwagi poświęcali zarówno eleatom (bo jakoby pogardzali matematyką, formułując aporie) jak i atomistom (bo byli materialistami, a matematyka była dziedziną ducha), ale od pewnego czasu to się zmienia. Dzisiaj dostrzega się już duży wpływ eleatów na matematykę i zaczyna dostrzegać wpływ atomistów.

Atomiści wierzyli w realność materii i głosili, że składa się ona z niepodzielnych i niezmiennych cząstek, które nazywali *atomami*. Atomy są w ruchu, zmieniając położenie i wchodząc w różne układy, a że pojęcia położenia i kształtu są bliskie matematyce, to atomiści uprawiali także matematykę. Wielką postacią atomistów był Demokryt z Abdery (460–371 p.n.e.), erudyta i wybitny uczony. Przypisuje się mu szereg twierdzeń matematycznych, np. że objętość piramidy oraz stożka jest równa 1/3 objętości odpowiednio prostopadłościanu oraz walca o tej samej podstawie i wysokości[94], co później udowodnił Eudoksos (ok. 406 – ok. 355 p.n.e.), korzystając z metody wyczerpywania. Demokryt posługiwał się też wielkościami nieskończenie małymi, które późniejsza matematyka nazwała *infinitezymalami*, i jego koncepcja wielkości infinitezymalnej (wielkości dodatniej, ale tak małej, że żadne mnożenie jej nie powiększy) okazała się trwałym elementem greckiej intuicji matematycznej.

Dla atomistów ważna była materia, a więc i doświadczenie materialnego świata. Niezależnie od nich, ale i pod ich wpływem matematyka grecka podejmowała wątki inspirowane przez świat materialny, co sprawiło, że doświadczenie stało się źródłem wielu problemów geometrycznych. Wymieńmy niektóre.

Wśród impulsów prowadzących do teorii proporcji znajdowały się takie potrzeby praktyczne jak mierzenie odległości statków na morzu i obliczanie wysokości piramid[95]. Duży rozgłos i znaczenie zyskały tzw. *problemy delijskie*, czyli zadania podwojenia sześcianu, trysekcji kąta i kwadratury koła, a ściślej, znalezienia konstrukcji z użyciem jedynie cyrkla i liniału prowadzących do tych rezultatów. Zadanie podwojenia sześcianu (wyrocznia delficka żądała podwojenia ołtarza Apollina) polega na tym, by wychodząc od danego odcinka a skonstruować odcinek b taki, że $2a^3 = b^3$. Zadanie trysekcji kąta polega na podaniu dokładnej konstrukcji, która dowolny łuk okręgu podzieli na 3 równe części. Zadanie kwadratury koła polega na tym, by wychodząc od danego odcinka r skonstruować

[94] Por. Archimedes, *Metoda*, 55b, 155n.

[95] Por. także Á. Szabó, *Die frühgriechische Proportionenlehre im Spiegel ihrer Terminologie*, „Archive for History of Exact Sciences" 1965, t. 2, nr 3, s. 197–270.

odcinek *c* taki, że $\pi r^2=c^2$ [96]. Rozwiązaniem każdego z tych trzech problemów miała być konstrukcja. Problemy te stanowiły wyzwanie dla konstrukcyjnej pomysłowości, ale jednocześnie oswajały z pojęciem *dokładności*.

Próby rozwiązania problemów delijskich trwały długo, ale wszystkie kończyły się niepowodzeniem[97]. Nie był to jednak czas stracony. Próby te doprowadziły bowiem do różnych odkryć, w tym do odkrycia tzw. *krzywych mechanicznych*, do budowania których potrzebne były „mechanizmy”. Takimi krzywymi były *kwadratrysa* Hippiasza i *spirale* Archimedesa (pozwalały na kwadraturę koła), *konchoida* Nikomedesa (pozwalała na trysekcję kąta i podwojenie sześcianu), a także takie krzywe jak *kisoida* Dioklesa. Znacznie to poszerzyło i wzbogaciło zakres matematyki greckiej[98].

Atomiści mieli też wpływ na powstanie metody wyczerpywania. Mimo jednak wyraźnego i współcześnie docenianego wpływu atomistów, charakterystycznym rysem matematyki greckiej pozostawało przywiązanie do czystych operacji umysłowych. Nieprzemijającym natomiast wkładem atomistów był pogląd, że wiedza o przyrodzie ma być wprawdzie teorią wyprowadzaną z zasad, ale weryfikowaną przez doświadczenie (uważa się, że aksjomaty Euklidesa były uogólnieniami codziennych doświadczeń). Zdaniem Arystotelesa pogląd ten umożliwił powstanie fizyki.

16. Grecki realizm pojęciowy

Prąd intelektualny, zainicjowany przez jońskich „miłośników mądrości” i kontynuowany przez szkoły filozoficzne pitagorejczyków, eleatów, atomistów i innych, osiągnął kulminację w „złotym wieku” starożytnej Grecji (w przybliżeniu lata 450–350 p.n.e.). Po odparciu perskich najazdów na czoło greckich miast -państw wysunęły się na pewien czas Ateny, a w atmosferze intelektualnej tego miasta popularne stały się rozważania filozoficzne, wraz z którymi upowszechniało się wśród jego obywateli myślenie abstrakcyjne, racjonalna refleksja nad światem i człowiekiem oraz krytyczna analiza wypowiadanych sądów. W tym „złotym wieku” pojawiło się w Atenach trzech wielkich filozofów: Sokrates (469–399 p.n.e.), jego uczeń Platon (427–347 p.n.e.) i uczeń Platona Arystoteles (384–322 p.n.e.). Najstarszy z nich Sokrates rozwinął i upowszechnił metodę dialektyczną oraz wysunął i bronił poglądu, że wiedza pewna zawiera się w pojęciach ogólnych, do których dochodzi się drogą szukania w wielości faktów,

[96] Więcej o tych konstrukcjach, por. L.N.H. Bunt, Ph.S. Jones, J.D. Bedient, T*he Historical Roots of Elementary Mathematics*, New York 1988. Elegancką (przybliżoną) konstrukcję kwadratury okręgu podał A.A. Kochański. Por. R. Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów oświaty i kultury*, Warszawa 2019, s. 88.

[97] Od końca XIX w. wiadomo, że konstrukcje takie nie istnieją. Elementarne wyjaśnienie można znaleźć w książce: R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, Warszawa 1953, s. 179–187.

[98] Th.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, Mineola-New York 2003.

sądów czy obiektów tego, co jest im wspólne i nazywania tej ich wspólnej cechy jednym krótkim terminem. Matematykę cenił, ale uwagę skupiał na człowieku.

W czasach Platona trwał szybki rozwój matematyki greckiej, panująca zaś w Atenach atmosfera racjonalnej, krytycznej refleksji sprawiała, że także w odniesieniu do matematyki stawiano pytania ogólniejszej natury. Na czoło tych pytań wysuwał się problem *istnienia*: czym są i jak istnieją obiekty matematyczne? Czym są liczby, których przecież w przyrodzie nie obserwujemy? Czym są figury geometryczne, które wprawdzie potrafimy rysować, ale każdy taki rysunek jest z natury ułomny i przedstawia tylko szczególny przykład ogólnego pojęcia?

Dla uprawiania samej matematyki problem istnienia wydaje się drugorzędny, jednakże ma on duże znaczenie dla uzasadnienia zajmowania się matematyką i dla oceny wartości jej wyników, a więc dla ważnego pytania o sens uprawiania matematyki. Jeśli obiekty matematyczne realnie nie istnieją, to ich badanie może być co najwyżej narzędziem uszlachetniania duszy. Podobnie jak gimnastyka uszlachetnia ciało, rozrywka umilająca czas i współczesne łamigłówki czy gra w karty. Wielkość Greków widoczna jest i w tym, że dostrzegli ten problem, docenili jego znaczenie i dali dwie, do dzisiaj ważne odpowiedzi, które nadały matematyce duże znaczenie.

Pierwsza pochodzi od Platona. Najważniejszym składnikiem jego filozofii była nauka o ideach. Wychodząc od poglądu Sokratesa, że wiedza pewna zawiera się w pojęciach ogólnych, Platon argumentował, że charakterystyczną cechą takich pojęć jest ich niezmienność i doskonałość. Kontrastuje to z otaczającym nas światem, którego obiekty są (jak uczył Heraklit i atomiści) zmienne, przemijające, niedoskonałe. Przedmiotem wiedzy pewnej muszą być zatem byty inne, wieczne i niezmienne. Te byty dopiero, którym Platon przypisywał realne istnienie w idealnym świecie i które nazywał *ideami*, stanowią prawdziwą rzeczywistość, a ponieważ są dostępne intelektualnemu oglądowi i mogą być ujmowane w pojęciach ogólnych. To oparta na takich pojęciach wiedza o świecie idei jest pewną i najgłębszą wiedzą o świecie. W szczególności obiekty matematyczne mają realność wyższą niż ich materialne przedstawienia[99]. Istotnym składnikiem filozofii Platona było też przekonanie, że świat został stworzony przez Demiurga, który odciskał te idealne formy na pierwotnie bezkształtnej materii[100]. Jak tłumaczył parabolą jaskini[101], świat rzeczy zmysłowych jest tylko niedoskonałym odbiciem świata idei, ale wiedza o tym świecie idei jest nam dostępna i daje prawdziwy wgląd w rzeczywistość.

Teoria idei Platona jest wielkim świadectwem próby zrozumienia tego, co naprawdę poznajemy. Zjawiska, o których informują nas zmysły, są jak chybotliwe cienie na ścianie jaskini – wtórne i zmienne, a opisujące je pojęcia tworzymy w naszych umysłach. Odpowiedź Platona, że poznajemy niezmienny świat ideal-

[99] Platon, *Państwo*, księga VI, 509a–511a, [w:] Platon, *Dialogi*…

[100] Platon, *Timajos*, 28 i nn., [w:] Platon, *Dialogi*…

[101] Platon, *Państwo*, księga VII, [w:] Platon, *Dialogi*…

nych bytów (w tym byty matematyczne), by potem odnajdywać je w otaczającym nas chaosie zjawisk tego świata[102] – jest wielka i silnie wpłynęła na całe późniejsze dzieje myśli europejskiej[103]. W matematyce nosi ona nazwę *platonizmu*, a jego zwolenników nazywa się *platonikami*. Współcześnie platonik to ten, który wierzy w ponadczasową rzeczywistość świata matematyki, choć niekoniecznie w oryginalnej wersji platońskiej[104].

Odnosząc odpowiedź Platona do arytmetyki uznajemy, że gdzieś w idealnym świecie istnieją ponadczasowe i niezmienne idee liczb, a zatem arytmetyka jest tylko *odkrywaniem* odwiecznie istniejących związków między nimi. Odnosząc odpowiedź Platona do geometrii uznajemy, że w tymże idealnym świecie istnieją także ponadczasowe i niezmienne idee form i brył, a geometria jest odkrywaniem odwiecznie istniejących ich własności i związków między nimi. Geometria była dla Greków, podobnie jak astronomia czy fizyka, odkrywaniem idealnych związków, które znajdowały swoje niedoskonałe odbicie w otaczającym nas świecie. I tak jak świat jest jeden, także geometria była dla nich jedna. Jak dla nas nadal jedna jest astronomia czy fizyka.

Geometria, którą wyłożył Euklides w swoich *Elementach*, dzisiaj nosi nazwę *geometrii euklidesowej*. Współczesna matematyka zna także inne rodzaje geometrii i inaczej postrzega ich relacje ze światem. Geometria euklidesowa nadal zajmuje w niej pozycję uprzywilejowaną leżąc u podstaw naszych intuicji. Nie tylko geometrycznych, ale także analitycznych (*vide* analiza klasyczna i jej rozmaite pochodne). Kant (1724–1804) podniósł ją nawet do rangi wiedzy syntetycznej *a priori*, a wielu późniejszych matematyków przypisywało jej rolę szczególną, np. René Thom (1923–2002) utrzymywał, że kluczową rolę w rozwoju intelektualnym człowieka odgrywają preegzystujące w jego umyśle struktury ciągłe, w tym geometria euklidesowa[105]. Niedawne badania języków i kultury ludów pierwotnych Amazonii pokazują, że powstające tam u dzieci spontaniczne idee geometryczne są zgodne z geometrią euklidesową[106].

Odmienną, ale też wielką odpowiedź na problem istnienia dał Arystoteles. W opozycji do Platona, kładł nacisk na związek matematyki ze światem fizycz-

---

[102] Platon, *Państwo*, 529–530, [w:] Platon, *Dialogi*…

[103] Mawiano, że cała historia filozofii jest komentarzem do Platona.

[104] Jak wykazują badania, 65% aktywnych matematyków jest platonikami, por. J.D. Monk, *On the foundation of set theory*, „American Mathematical Monthly” 1970, nr 77, s. 703–711. Cyt. za Ph.J. Davis, R. Hersh, E.A. Marchisotto, *Świat matematyki*, Warszawa 2001, s. 312. Platonikiem był L. Kronecker, por. jego słynne powiedzenie „Bóg stworzył liczby całkowite, wszystko inne jest dziełem człowieka”. Platonikami byli także K. Gödel i R. Thom.

[105] R. Thom, *Matematyka a rozumienie*, „Wiadomości Matematyczne” 1981, t. 23, nr 2, s. 205–212.

[106] V. Izard, P. Pica, E. Spelke, S. Dehaene, *Flexible intuition of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group*, „Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America” 2011, nr 108, s. 9782–9787.

nym. W swoich dziełach stworzył wielką metafizykę aktu i możności, która stała się podstawą nauk przyrodniczych, podsumował dotychczasowe osiągnięcia greckich nauk szczegółowych i zapoczątkował racjonalną refleksję nad nauką jako taką, a w szczególności stworzył *logikę*, czyli naukę poprawnego myślenia.

Stosunek Arystotelesa do matematyki był pochodną jego metafizyki. Odrzucając istnienie platońskiego świata idei, Arystoteles za jedyną realność uznawał otaczający nas świat fizyczny. Badanie zaś tego świata opierał na rozróżnieniu bezkształtnej *materii* i kształtujących ją *form.* Formy Arystotelesa są idealne i w tym są podobne do platońskich idei, jednakże w odróżnieniu od tych idei nie mają one samodzielnego bytu, lecz jedynie byt pomyślany. Istnieją bowiem jedynie w powiązaniu z ciałami fizycznymi. Każda forma wyznacza pewien *gatunek* i dopiero połączenie formy i materii daje fizyczną *jednostkę*, a zatem świat ma strukturę *gatunkowo-jednostkową*. Zdaniem Arystotelesa, nauka powinna badać ciała fizyczne w ich związku materii i formy i starać się dojść do kryjącej się za tym związkiem *istoty rzeczy*. Matematyka jest w stanie opisywać niektóre formy pod względem liczby i kształtu, a zatem obiekty matematyczne są formami. Matematyka może być zatem dla badania naukowego użyteczna, a jej znaczenie jest tym większe, im bliższa istoty rzeczy jest badana forma matematyczna.

Wspólna cecha odpowiedzi Platona i Arystotelesa na problem istnienia w matematyce nosi nazwę *realizmu pojęciowego*. Obaj bowiem przypisywali pojęciom matematycznym (i ogólniej, tzw. *uniwersaliom*, inaczej *powszechnikom*[107]) byt rzeczywisty. Różnili się tym, że Platon przypisywał im byt samoistny i stąd jego pogląd nazywa się *skrajnym realizmem pojęciowym*, natomiast Arystoteles odmawiał im bytu samoistnego, uznając je tylko za pewną abstrakcję wydedukowaną z materii i stąd jego pogląd nazywa się *umiarkowanym realizmem pojęciowym*. Oba te poglądy są do dzisiaj żywe (ale nie jedyne, we współczesnej matematyce duże znaczenie ma np. zrodzony w średniowieczu *nominalizm*).

Pogląd Arystotelesa może się wydawać bardziej trzeźwy, jednakże każdy, kto miał głębszą styczność z matematyką, wie z własnego doświadczenia, że zajmując się matematyką szybko nabierał subiektywnego przekonania, iż zajmujące go obiekty są rzeczywiste. Lepiej odpowiada temu przekonaniu platonizm. W konsekwencji, wpływ poglądów Arystotelesa na dzieje matematyki był słabszy. Z kolei słabą stroną platonizmu jest pokusa *aprioryzmu*, według którego należy się skupić na badaniu świata idei, bo on powie o materialnej rzeczywistości więcej, niż jej bezpośrednie badanie.

Mimo tych różnic, powszechne wśród Greków przekonanie o realności obiektów matematycznych (przy obu rozumieniach tej realności, platońskim i arystotelesowskim) nadawało matematyce duże znaczenie i wydatnie się przyczyniało do jej rozwoju.

---

[107] Uniwersalia, czyli pojęcia ogólne i i odpowiadające im nazwy.

17. Synteza matematyki greckiej

Pod koniec IV w. p.n.e. kultura grecka doznała gwałtownej zmiany. Skończyła się epoka klasyczna (*helleńska*) i zaczęła się epoka nowa. Za jej początek przyjmuje się rok 323 p.n.e., kiedy zmarł Aleksander Wielki. A na ogromnych, wcześniej przez niego podbitych obszarach, rozlała się kultura helleńska, mieszając z kulturami rodzimymi i dając początek, pod opieką greckich dynastii Ptolemeuszy, Seleukidów i innych, nowej epoce, zwanej *hellenistyczną*. Czołowym jej ośrodkiem stało się założone przez Aleksandra Wielkiego greckie miasto Aleksandria w Egipcie. Nie traktowana jako część Egiptu, dogodnie położona na zbiegu szlaków, stała się Aleksandria na kilka następnych wieków czołowym ośrodkiem hellenistycznego świata, w którym kwitły różne nauki, promieniując na cały basen Morza Śródziemnego.

W Aleksandrii były instytucje grupujące uczonych mężów (Museion, Biblioteka) i tam działał Euklides, którego wielkie dzieło *Elementy*[108] było zarówno podsumowaniem osiągnięć matematycznych epoki archaicznej i klasycznej, jak i źródłową podstawą dla matematyki wieków następnych. Wspomnijmy na marginesie, że najstarsze kopie *Elementów* Euklidesa pochodzą dopiero z X w., a więc są ponad tysiąc lat młodsze od oryginału, ponadto kopiści niejednokrotnie wprowadzali do tekstu zmiany. Drobiazgowa analiza filologiczna pozwoliła jednak ustalić tekst, który uchodzi za najbardziej zbliżony do oryginału. Za taki jest uznawany tekst J.L. Heiberga i jego angielski, przytoczony przed chwilą przekład T.L. Heatha.

Przed Euklidesem Grecy stworzyli kilkanaście teorii matematycznych i pisywali syntezy, ale wszystko to poszło w niepamięć z chwilą ukazania się 13 ksiąg jego *Elementów*, które objęły znaczną ich część. Sam Euklides nie jest uważany za wybitnego matematyka, chociaż napisał także kilka innych traktatów[109]. Co więcej, wiele twierdzeń i obszerne fragmenty *Elementów* zostały przejęte od innych autorów, w tym Teajteta (księgi X i XIII), Eudoksosa (księgi V i XII) oraz cała część arytmetyczna (księgi VII–IX). Euklides był jednak zręcznym kompilatorem i znakomitym dydaktykiem, a jego traktat, napisany na potrzeby aleksandryjskiego środowiska, miał wpływ ogromny i nadzwyczaj trwały.

Księga I *Elementów* Euklidesa zaczyna się od 23 określeń, poczynając od określenia punktu, a kończąc na określeniu prostych równoległych. Po tych określeniach (definicjach) nastąpiły zdania, przyjmowane w tym dziele bez dowodów, w postaci 5 postulatów i 4 aksjomatów (później rozróżnianie postulatów i aksjomatów, w co tutaj nie wchodzimy, zostało zarzucone i dzisiaj wszystkie twierdzenia przyjmowane na początku teorii bez dowodu nazywa się *aksjomatami*),

[108] Euklides, *The Thirteen Books…*

[109] Krytyczne opracowanie ocalałych prac Euklidesa, w tym *Elementów*, zawiera dzieło: J.L. Heiberg, H. Menge, *Euclidis Opera Omnia*, t. 1–9, Leipzig 1883–1916.

a po nich 48 *twierdzeń* z *dowodami*, z których dwa ostatnie są prostym i odwrotnym twierdzeniem Pitagorasa. Tak się te twierdzenia nazywa współcześnie, Euklides jednak w swoim traktacie nie przytacza żadnych nazwisk i nie ujawnia żadnych źródeł.

Już ta księga I dobitnie ilustruje zarówno fundamentalną zmianę charakteru matematyki greckiej w stosunku do spuścizny Babilonii czy Egiptu, jak i ogromny dorobek nagromadzony przez greckich matematyków w okresie zaledwie paru poprzednich stuleci. Przed Grekami pojęć ogólnych (rodzajowych) nie było wcale, tu natomiast są one początkiem i sednem, zajmowanie się zaś wyłącznie nimi wymusiło nową organizację wiedzy, na którą składają się *aksjomaty* (początkowo także postulaty), określenia czyli *definicje*, wreszcie *twierdzenia* i ich dedukcyjne *dowody* – pojęcia wcześniej całkowicie nieznane[110].

Podobną strukturę – określenia i twierdzenia z dowodami (postulatów i aksjomatów już jednak nie przybywa) – mają wszystkie następne księgi, a ich lektura pogłębia jeszcze wrażenie fundamentalnej różnicy dzielącej matematykę grecką od dziedzictwa przeszłości. Księga II (2 definicje, 14 twierdzeń) jest krótka i zawiera geometryczne dowody niektórych własności arytmetycznych, np. praw rozdzielności czy łączności. Przedmiotem księgi III (11 definicji, 37 twierdzeń) są okręgi, a księgi IV (7 definicji, 16 twierdzeń) – wielokąty wpisane w koło lub opisane na kole, w tym konstrukcje kilku pierwszych wielokątów foremnych. Ważna i piękna (ale doceniona dopiero w wieku XIX) jest księga V (18 definicji, 25 twierdzeń) poświęcona teorii stosunków (sekcja 11). Opiera się na niej księga VI (5 definicji, 33 twierdzenia), w której dowodzi się m.in. twierdzenia Talesa, cech przystawania trójkątów i oblicza pola niektórych wielokątów. Następne trzy księgi – księga VII (23 definicje, 39 twierdzeń), księga VIII (27 twierdzeń) i księga IX (36 twierdzeń) – zajmują się teorią liczb naturalnych. Zaczynają się od algorytmu znajdowania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb, co prowadzi do tzw. ułamków łańcuchowych, ważnego później narzędzia badania niewymierności, a następnie badają proporcje ciągłe i liczby pierwsze. Księga X (23 definicje, 115 twierdzeń) jest najobszerniejsza, a jej przedmiotem jest teoria niewymierności oraz przedstawienie teorii wyczerpywania[111]. Ostatnie trzy księgi, to geometria przestrzeni. Księga XI (28 definicji, 39 twierdzeń) zajmuje się bryłami wielościennymi, księga XII (18 twierdzeń), to geometria kuli i walca, a ostatnia księga XIII (18 twierdzeń), stanowiąca zwieńczenie całości, kończy się pięknym twierdzeniem, że istnieje pięć i tylko pięć wielościanów foremnych, zwanych też bryłami platońskimi.

---

[110] Babilończycy mieli świadomość niektórych głębszych prawidłowości, np. tej kryjącej się w twierdzeniu Pitagorasa, ale nie byli w stanie ich sformułować, ani tym bardziej udowodnić, por. B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*…, t. 1, s. 126–128; A. Aaboe, *Matematyka w starożytności*, tłum. R. Ramer, Warszawa 1968, s. 36.

[111] Analizę księgi X daje B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*…, t. 1, s. 275–282.

Dzieło Euklidesa wzbudziło zachwyt współczesnych i przez następne dwa tysiące z górą lat było uważane za niedościgły ideał, wzór wiedzy pewnej. A że traktowało o matematyce, to ten splendor spływał i na nią. Wyrazem ogromnego autorytetu matematyki było włączenie jej w postaci *quadrivium* do kanonu wydziałów filozoficznych średniowiecznych uniwersytetów, przez które musiał przejść każdy żak. Podstawowym składnikiem tego kanonu były *Elementy* Euklidesa[112]. Z licznych opinii o *Elementach* przytoczmy jedną. Wybitny matematyk włoski Girolamo Cardano (1501–1576) tak o nich pisał: „Bezsprzeczna moc pewników tego systemu i jego dokładność jest tak absolutna, że dalibóg, żadnego innego traktatu nie da się z nim porównać. W *Elementach* przebija takie światło prawdy, że tylko ten, kto poznał Euklidesa, potrafi odróżnić w geometrii prawdę od fałszu".

Z czasem okazało się, że *Elementy* mają jednak różnego rodzaju luki. Nadanie geometrii euklidesowej współczesnej ścisłości zawdzięczamy Hilbertowi[113], ale było to tylko nadanie precyzyjnego kształtu (z punktu widzenia współczesnej metodologii) euklidesowej teorii, która nadal pozostaje w żywym krwiobiegu matematyki. Teoria ta nosi nazwę *geometria euklidesowa*, a opisana przez nią *przestrzeń euklidesowa* do dzisiaj jest podstawowym rodzajem przestrzeni matematycznej i podstawowym źródłem intuicji matematycznych. Przez ponad dwa tysiące lat *Elementy* stanowiły też inspirację do dalszych dociekań *more geometrico*[114] i niedościgniony wzorzec podręcznika[115]. Euklides jest do dzisiaj ciągle jeszcze najczęściej cytowanym nazwiskiem w matematyce.

18. Dalsze wpływy filozoficzne w matematyce greckiej

Jak staraliśmy się pokazać, grecka matematyka wyrosła z filozofii i długo pozostawała w bliskim z nią związku. Oprócz wcześniej wspomnianych miało to także inne jeszcze konsekwencje i o niektórych z nich teraz powiemy.

Najważniejszą może konsekwencją było uznanie realności obiektów matematycznych, a tym samym uprawomocnienie matematyki jako dziedziny zajmującej się obiektami realnymi, silnie związanymi z otaczającym nas światem. Było to wyrwanie matematyki z kręgu dotychczasowych umiejętności praktycznych (Babilonia, Egipt) czy intelektualnych rozrywek (Chiny) oraz nadanie jej charakteru wiedzy głęboko wnikającej w świat realny. Przy czym dotychczasową empirię, tradycję czy naoczność zastąpił intelektualny namysł i krytyczna kontemplacja. Był to niewątpliwy awans tej wiedzy, ale miał on swoją cenę, którą stał się nie-

[112] Na średniowiecznych uniwersytetach studiowanie *Elementów* nierzadko ograniczało się do dwóch pierwszych ksiąg.

[113] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart 1987.

[114] Por. B. Spinoza, *Ethica ordine geometrico demonstrate*, 1677.

[115] Jak wspominał B. Russell, jeszcze pod koniec XIX w. *Elementy* Euklidesa były w Anglii jedynym aprobowanym podręcznikiem geometrii.

chętny stosunek do praktyki, w tym do rachunków. W konsekwencji arytmetyka grecka rozwinęła się stosunkowo słabo i miała charakter kontemplacyjny. Za cel stawiała sobie poznanie natury liczb i ich ukrytego znaczenia, bo przecież „elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy", co w skrajnych przypadkach prowadziło na manowce *numerologii*.

Zacofanie greckiej arytmetyki jest wyraźnie widoczne w utrzymywaniu się archaicznych sposobów <u>zapisywania</u> liczb, co przedziwnie kontrastuje z cudownie logicznym dziesiętnym sposobem <u>nazywania</u> liczb naturalnych. Rachunki ważne w codziennym życiu przeprowadzano na *abaku* (desce do rachowania), a zapisywano tylko wyniki, rachunki zaś niezbędne w astronomii wykonywano w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym i w oparciu o babilońskie tablice (co utrzymywało się do średniowiecza). Zera nie znano.

Uznanie matematyki za wyrafinowaną dziedzinę intelektualną nadawało jej silny rys elitarny i czyniło z niej zajęcie dla elit, co jednak ograniczało jej rolę kulturową do kształcenia tych elit. Filozofia narzuciła też niektóre rozwiązania szczegółowe, np. pojęcie nieskończoności potencjalnej wynikało z metafizyki Arystotelesa, a jego wielki autorytet sprawił, że zostało powszechnie przyjęte (sekcja 13).

Arystoteles główny cel nauki upatrywał w docieraniu do *istoty* rzeczy. Tak patrzył na fizykę i na jej potrzeby rozróżnił ruchy *naturalne* (do i od środka świata, utożsamianego ze środkiem Ziemi) i ruchy *wymuszone.* To rozróżnienie leży u podstaw jego dynamiki a jego rozważania w tym zakresie obywały się bez matematyki[116]. Arystoteles dzielił też świat na dwie jakościowo odmienne strefy, których granicą była orbita Księżyca: Ziemię i jej otoczenie sięgające Księżyca, czyli strefę *sublunarną* (podksiężycową), oraz resztę świata z Księżycem włącznie, czyli strefę *supralunarną* (nadksiężycową)[117]. Świat supralunarny uważał za idealny, miał się on bowiem składać z ciał, które z istoty swojej były idealne i których ruchy były także idealne, czyli jednostajne po okręgach.

Z tych dwóch jego poglądów wynikało rozróżnienie matematyki czystej i matematyki stosowanej. Ta pierwsza miała się zajmować badaniem czystych idei, natomiast ta druga zastosowaniami do nauk szczegółowych o przyrodzie. Ponieważ przedmiotem nauk szczegółowych jest zmiana, a matematyki – świat form niezmiennych, przeto w świecie sublunarnym rola matematyki była z natury rzeczy ograniczona. Badanie naukowe nie mogło ograniczać się do matematycznego opisu i matematyka nie mogła służyć za podstawę pełnego wyjaśnienia. Z tego powodu matematykę Arystoteles cenił mało.

Inaczej rzecz się miała ze strefą supralunarną, którą tworzyły idealne ciała niebieskie i obserwowane w niej ruchy były idealne. Te ruchy należały do istoty ciał

[116] Arystoteles, *Fizyka*, [w:] Arystoteles, *Dzieła*...

[117] Arystoteles, *O niebie*, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 2, Warszawa 1990. Jego terminologia była inna, mówił o strefie „dolnej" i „górnej". Przytoczone w tekście nazwy są późniejsze.

niebieskich, a zatem w tej strefie matematyka była w pełni uprawniona. Ponieważ wszelki ruch w sferze supralunarnej jest „nieskończony, wieczny i ciągły”, to „ruchem tym jest ruch kołowy”[118]. To przekonanie narzuciło astronomii pogląd – nigdy wyraźnie nie sformułowany, ale tak silny, że silnie zaciążył na dalszym jej rozwoju przez prawie dwa tysiące lat, który można nazwać *dogmatem kołowym*. Zgodnie z nim ruch wszystkich ciał niebieskich, w tym planet, należy opisywać za pomocą ruchów jednostajnych po okręgach.

Największą trudność dla takiego opisu przedstawiają planety, które „błądzą”, tj. czasem przesuwają się zgodnie z kierunkiem ruchu sklepienia, a czasem przeciwnie do tego ruchu. Pozostając w zaklętym kręgu ruchów kołowych, astronomowie greccy obmyślali skomplikowane systemy opisujące ruch planet. Najdoskonalszym z nich okazał się system *geocentryczny* Ptolemeusza z II w. n.e.[119], z pewnymi modyfikacjami używany przez następnych kilkanaście wieków aż do początku czasów nowożytnych. Przełamali ten dogmat dopiero Kopernik (1473–1542), który odrzucił geocentryzm, za centrum świata uznając Słońce, a Ziemię przesuwając na jego obrzeża i tworząc system *heliocentryczny*[120], co pozwoliło znacznie uprościć system ptolemejski (Kopernik zachował jednak jednostajne ruchy kołowe), oraz Kepler (1571–1630), który wprowadził do opisu orbity eliptyczne i ruch niejednostajny.

Autorytet Arystotelesa był ogromny i powszechnie uznawany, a te dwa jego poglądy – świat dwustrefowy i istotowy cel nauki – zostały ostatecznie przełamane dopiero w XVII w., w dużej mierze za sprawą Newtona. Newton uznał odkrycie istoty grawitacji za niemożliwe, ale podał jej opis matematyczny[121], który wystarczył do opisania wszystkich ruchów materii w obu greckich strefach świata, unieważniając tym samym podział tego świata na dwie strefy. Matematyka wyszła z tej historii obronną ręką, okazując się nie tylko uprawnionym, ale wręcz niezbędnym narzędziem opisywania i badania świata.

19. Dalsze dzieje matematyki greckiej

Wieki VII–IV p.n.e. były okresem dojrzewania matematyki greckiej, której imponujący dorobek i dojrzały pod ich koniec kształt został podsumowany w *Elementach* Euklidesa. Okres hellenistyczny, który zaczął się wraz ze śmiercią Aleksandra Wielkiego w 323 r. p.n.e. i trwał do aneksji Egiptu przez Rzym w 30 r. p.n.e., był początkowo okresem dalszego rozwoju matematyki, ale wkrótce i jej dekadencji. W całym tym okresie kwitła i promieniowała Aleksandria, intelektualna stolica ówczesnego świata.

---

[118] Arystoteles, *Fizyka*, 261b, [w:] Arystoteles, *Dzieła*…

[119] *Ptolemy's Almagest*, red. G.J. Toomer, New Jersey 1998.

[120] M. Kopernik, *De revolutionibus orbium coelestium*, Norymberga 1543.

[121] I. Newton, *Philosophiae naturalis*…

W Aleksandrii wykształcił się Archimedes (287–212 p.n.e.), ale działał w rodzinnych Syrakuzach. Jego osiągnięcia matematyczne swoją głębią przekraczają wszystko, co zrobili jego przednicy, a dwa jego traktaty fizyczne są jedynymi z tamtych czasów, które do dzisiaj zachowały wartość. W swoich traktatach matematycznych Archimedes wykazywał nadzwyczajne mistrzostwo i odwagę przekraczania różnych dotychczasowych barier. Z jego spuścizny zachowało się kilkanaście traktatów matematycznych i kilka fizycznych, ale spora część jego dzieł zaginęła[122]. Powszechnie jest uważany za jednego z największych geniuszy matematycznych świata (porównanie z nim wytrzymują bodaj tylko Newton i Gauss).

W 212 r. p.n.e. Rzymianie zdobyli Syrakuzy, a w czasie zwycięskiego szturmu zginął Archimedes. Śmierć Archimedesa z ręki rzymskiego żołnierza miała rangę symbolu. Rzym, który wkrótce zdominował cały basen Morza Śródziemnego i zagarnął znaczną część Europy (w tym półwysep iberyjski, Galię z częścią Germanii i sięgnął po Anglię) oraz ogromne obszary Wschodu – stworzył cywilizację wielką, ale była to cywilizacja bez matematyki. Obdarzeni zmysłem praktycznym, Rzymianie nie mieli zrozumienia dla rozumowań abstrakcyjnych i ich nie cenili. Na opanowanych przez nich obszarach działalność naukowa, w tym matematyczna – gasła. Między I a IV wiekiem zaznaczyli się jeszcze Heron, Ptolemeusz (twórca geocentrycnego systemu świata) i Diofantos, ale potem były już tylko komentarze, redakcje dawniejszych tekstów i ich kompilacje, a także troska o przetrwanie upadku imperium. Wielka matematyka grecka przeszła do historii. Ocalili ją Arabowie, a potem wskrzesiła Europa, ale na nowy okres rozwoju matematyki trzeba było czekać ponad tysiąc lat, aż do początku czasów nowożytnych.

Archimedes nie pozostawił żadnych dzieł filozoficznych, ale zapoczątkował, samą tylko siłą swojej twórczości, trzecie, po Platonie i Arystotelesie, podejście do badań naukowych, a w szczególności do matematyki. Podejście to cechuje swoisty *sceptycyzm metafizyczny*, dla Archimedesa liczyły się bowiem tylko fakty (czyli dowiedzione twierdzenia), a nie metafizyczne komentarze i wyjaśnienia. Dzięki temu, że jego twórczość była wolna od wpływów filozoficznych, stał się on patronem tych wszystkich, którzy idą drogą pełnej autonomii matematyki[123].

---

[122] Ocalałe dzieła Archimedesa zostały starannie wydane, zob. Archimedes, *The Works of Archimedes*, Mineola-New York 2002. Dobre opracowanie jego dzieł matematycznych zawiera E.J. Disterkhuis, *Archimedes*, Princeton N.J. 1987. Ciągle jednak zdarzają się odkrycia niezwykłe, jak palimpsest zawierający niektóre teksty Archimedesa uważane za zaginione. Niedawne odkrycie tego palimpsestu i jego odczytanie opisuje książka: R. Netz, W. Noel, *Kodeks Archimedesa. Tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata*, tłum. A. Jeżewski, Warszawa 2007. Por. także recenzję tej książki: R. Duda, *Reviel Netz, William Noel, Kodeks Archimedesa. Tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata*, „Wiadomości Matematyczne" 2009, t. 45, s. 378–383.

[123] Por. R. Duda, *Trzy tradycje*, [w:] *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, red. R. Murawski, J, Woleński, Poznań 2008, s. 11–22.

„W całej historii nauki te trzy główne tradycje powtarzają się nieustannie. Czasem uczeni czynili aprioryczne wysiłki skonstruowania świata i jego części z idealnych matematycznych struktur stosowanych do zjawisk przyrody. Mamy wtedy do czynienia z tradycją *platońską* (bez względu na to, czy dany mąż był bezpośrednio pod wpływem filozofii Platona czy jednej z wielu jego późniejszych kontynuacji). W innych przypadkach naukowy dyskurs o naturze uznaje swe empiryczne podstawy. Tu jednak drogi się rozchodzą. Jeżeli zjawiska przyrody są powiązane z metafizycznymi relacjami wyrażanymi przez przyczyny i skutki lub inne koncepcje metaforyczne, jesteśmy bez wątpienia w tradycji *arystotelesowskiej* z jej zasadą eksperymentu i szukaniem przyczyn. Gdy jednak zjawiska te są powiązane przez relacje matematyczne o charakterze niemetaforycznym i bez przyczynowych czy teleologicznych uwarunkowań, wtedy kroczymy po śladach Archimedesa”[124].

Wpływ filozofii na matematykę grecką miał i ten skutek, że nadzwyczajnie rozwinęła się rozumowa geometria, natomiast arytmetyka, bliska pogardzanej przez filozofów praktyki – słabo. Okryto kilka faktów, które dziś należą do kanonu teorii liczb (liczby pierwsze i ich nieskończoność, algorytm znajdowania największego wspólnego dzielnika itp.), jednakże aporia niewymierności zachwiała wiarą w potęgę liczb, połączona zaś z pogardliwą niechęcią ludzi wykształconych do zajmowania się rachunkami, uważanymi za domenę kupców i przedsiębiorców, spowodowała zanik zainteresowań arytmetycznych i skupienie się na geometrii. Geometria natomiast pociągała naocznością oraz klarownością zasad i procesów, a swoją moc przejawiła w teorii stosunków, która dostarczyła narzędzi do opanowania niewspółmierności na geometrycznym gruncie.

Ta niechęć do arytmetyki zdaje się tłumaczyć zdumiewający kontrast w języku greckim między nazywaniem a zapisywaniem liczb naturalnych. Grecy mieli cudownie klarowny system dziesiętny nazywania liczb. Liczby 1, 2, … , 10 miały osobne nazwy, przechodzące potem do łaciny i innych języków europejskich (w tym polskiego, np. *duo* – dwa, *treis* – trzy, *pente* – pięć). Następnie były dziesiątki 10, 20, … , 90 i setki 100, 200, etc. Pozostałe liczby były sumacyjnymi kombinacjami wymienionych.

Sposobów zapisywania liczb Grecy mieli w zasadzie dwa. Najpierw były to systemy *akrofoniczne,* tzn. większość znaków dla wyróżnionych w zapisie liczebników pochodziła od pierwszej litery słownej nazwy danego liczebnika, np. w Attyce (każda grecka *polis* miała własny system zapisu, ale czasem niewiele się one od siebie różniły), system był addytywny piątkowo-dziesiętny, a znaki były następujące: na jedności kreski (|), dziesiątki (Δ, *deka*), setki (H, *hekaton*), tysiące (X, *chilioi*) i dziesiątki tysięcy (M, *mirioi*), a do uproszczania zapisów służył dodatkowy znak Π oznaczający 5 (*pente*). Ale już w V w. p.n.e. pojawił się

[124] O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza…*, s. 53–54.

system *joński*, który wyparł poprzednie i był używany do końca greckiej cywilizacji, a nawet i później. Był to system literowy, w którym każda z liczb 1, 2, … , 9, 10, 20, … , 90, 100, 200, … , 900 była oznaczana osobną literą alfabetu (w tym celu wprowadzono dwie dodatkowe litery, w piśmie nie używane), poczynając zaś od 1000, 2000, … oznaczenia się powtarzały z akcentem na odpowiedniej literze. np. liczbę 3677 zapisano by w tym systemie tak: ‘γχοζ[125]. Był to więc zapis znacznie bardziej oszczędny od poprzednich, co tłumaczy jego powodzenie, ale z punktu widzenia arytmetyki był to krok wstecz. Powszechność systemu jońskiego świadczy o całkowitym zdaniu się w rachunkach na *abak* (deskę rachunkową), w różnych wersjach używany do XX w., a w szczególności o całkowitym braku algorytmów pisanych dla rachowania (te pojawiły się dopiero pod koniec średniowiecza w związku z upowszechnieniem cyfr arabskich i zapisu dziesiętnego). Przejście od dziesiętnego nazywania do dziesiętnego zapisywania dokonało się ostatecznie dopiero w Europie u progu czasów nowożytnych, w wyniku upowszechnienia cyfr tzw. arabskich, i stanowiło wybitny czynnik sprzyjający rozwojowi nowożytnej arytmetyki, a później i algebry, która wyrosła wkrótce na dużą i ważną gałąź matematyki. Zapatrzeni w swoją geometrię Grecy nie dostrzegli tej możliwości, dla Europy było to natomiast kolejne otwarcie puszki Pandory.

20. Podsumowanie

Wieki VII–IV p.n.e., w których Grecy ukształtowali swoje widzenie matematyki, były przełomowe dla tej dziedziny wiedzy. Wymienimy teraz najważniejsze cechy tego przełomu.

Grecy przejęli dorobek intelektualny Babilończyków i Egipcjan, wyróżnili w tym dorobku pewną jego część i nadali jej nazwę *matematyka*. Podzielili matematykę na cztery części – *arytmetyka, muzyka, geometria, astronomia* – i uznali je za ważną wiedzę. Części te, objęte później łacińską nazwą *quadrivium*, weszły do kanonu obowiązkowego kształcenia na średniowiecznych uniwersytetach. Grecka *matematyka* wyrosła z ich *filozofii*, a impulsem, dzięki któremu od początku miała swoiste rysy, było przejście na wyższy poziom ogólności, polegający na rozważaniu nie pojedynczych obiektów, ale ich klas (rodzajów). Takie klasy, jak np. klasa trójkątów równoramiennych, którą rozważał już Tales, stanowiły treść nieznanych wcześniej *pojęć ogólnych*. Chociaż po wyróżnieniu jej osobną nazwą matematyka grecka zyskała autonomię, jej związki z filozofią pozostały silne, a odnoszące się do niej pytania filozoficzne, w tym pytanie o sposób istnienia obiektów matematycznych (sekcja 16), były dla niej ważne i miały wpływ na jej dalsze dzieje.

[125] Por. *Vademecum historyka starożytnej Grecji i Rzymu*, t. 1–2, red. E. Wipszycka, Warszawa 2001.

Problem, czym są *pojęcia ogólne* i jaki jest ich stosunek do realnego świata, grecka filozofia podjęła i dała dwie odpowiedzi. Według Platona są one *ideami* istniejącymi realnie i samoistnie, poznawalnymi czystą myślą, a świat realny jest ich niedoskonałym odbiciem. Według Arystotelesa są one ideami, ale nie mają samoistnego bytu, są bowiem jedynie cechami obiektów realnych, a więc wprawdzie istnieją realnie (jako cechy obiektów realnych), ale nie istnieją samoistnie. Obie odpowiedzi, w filozofii nazywane *realizmem pojęciowym,* stanowiły silne uzasadnienie dla zajmowania się matematyką i do dzisiaj zachowały znaczenie.

e) Na początku greckiej matematyki punktem wyjścia bywał problem mający zwykle charakter *hipotezy*, Rozstrzygnięcie takiej hipotezy wymagało nieznanych wcześniej sposobów *uzasadniania*. Chociaż te nowe sposoby miewały (zwłaszcza początkowo) charakter naoczno-poglądowy, to samo ich pojawienie się sprawiło, że była to już matematyka odmienna od babilońskiej czy egipskiej, choć na początku jeszcze niezupełnie ścisła. Te pierwsze rozstrzygnięcia długo były traktowane jako podlegające dalszemu oglądowi i nieostateczne. Rozstrzyganie opierało się na *dedukcji,* traktowanej jako niepodważalna zasada poprawnego rozumowania (sekcja 8): jeśli p i z p wynika q, to q. Grecy tę zasadę nie tylko wyróżnili, ale i poddali krytycznej analizie, zapoczątkowując nieznaną wcześniej *logikę,* czyli naukę poprawnego rozumowania.

Posługiwanie się pojęciami ogólnymi i myślenie dedukcyjne wyłoniły potrzebę *definiowania* pojęć, przesłanki rozumowania dedukcyjnego musiały bowiem być wyraźne. Charakterystyczne dla greckiej filozofii poszukiwanie początku każdej wiedzy wpłynęły na dążenie greckich matematyków do poszukiwania pierwszych zasad, z których można wyprowadzić całą matematykę. Zasady te wyróżniano nazwami *aksjomaty* i *postulaty*. Aksjomaty były sądami ogólnymi, które uznawano za oczywiste i ogólnie prawdziwe, natomiast postulaty były sądami specyficznymi, przyjmowanymi umownie na początku rozważań bez uzasadnienia (taki charakter miał Postulat Równoległości Euklidesa). Pozostałe sądy matematyczne były *twierdzeniami* mającymi dedukcyjne *dowody* w oparciu o wyróżnione aksjomaty i postulaty. Sądy takie łączono w *teorie* złożone z ogólnych pojęć i twierdzeń powiązanych dedukcyjnymi więzami wewnętrznej konieczności. Grecy stworzyli kilkanaście teorii matematycznych.

Bogatym źródłem problemów matematycznych była nadal empiria, jednakże świat pojęć ogólnych i dedukcyjnego rozumowania umożliwił dostrzeżenie nieznanych wcześniej i niemożliwych do dostrzeżenia w pierwotnym kontekście empirycznym zjawisk i problemów, np. zjawiska niewymierności czy problemu nieskończoności. Dużą rolę w greckiej geometrii odgrywały wcześniej nieznane *konstrukcje*. Większość dowodów twierdzeń geometrycznych polegała na konstrukcyjnym przekształcaniu wyjściowych figur z pomocą cyrkla i liniału. Niektóre poszukiwane konstrukcje okazały się tak trudne, że stały się problemami (por. problemy delijskie) i wysiłki zmierzające do ich znalezienia silnie wpłynęły na rozwój matematyki. Podstawowymi przyrządami konstrukcyjnymi był *liniał* (bez zaznaczonych punktów, pozwalający jednak łączyć dwa dowolne punkty odcinkiem) oraz *cyrkiel* (pozwalający kreślić łuki i całe okręgi). W związku z konstrukcjami pojawiła się idea *dokładności* (konstrukcja musiała być jednoznaczna, dokładna), przybliżeń nie uznawano.

Dużą rolę w rozwoju greckiej matematyki odgrywały *aporie* (problemy, trudności) powstające wówczas, gdy w odpowiedzi na jakiś problem (np. czy Achilles dogoni żółwia) formułowano dwie sprzeczne odpowiedzi. Aporie rodziły ferment i stanowiły wyzwanie. Przezwyciężenie aporii dodawało wiary w siłę rozumu i otwierało nowe horyzonty. Aporia niewymierności spowodowała kryzys matematyki greckiej. Przezwyciężono go budując matematykę rygorystyczną (a nie hipotetyczną), opartą na wyraźnych aksjomatach i postulatach oraz ścisłej dedukcji. Dopiero po tej przebudowie hipotetyczne wcześniej twierdzenia zyskały status twardych faktów.

Aporia niewymierności miała też inne skutki. Jednym z nich było uznanie, że rozumowanie, które do niej doprowadziło, jest w istocie nowym rodzajem dowodu, opartym na zasadzie: jeśli z *p* wynika *non* p, to *non* p (tzw. dowód *a contrario*). Ten nowy rodzaj dowodu istotnie wzbogacił grecką matematykę i logikę, jest też do dzisiaj z powodzeniem stosowany. Jeszcze innym jej skutkiem było zbudowanie geometrycznej teorii stosunków, która pozwoliła na ścisłe traktowanie niewymierności na gruncie geometrii. Teoria ta, długo niedoceniana, przyczyniła się do powstania w XIX w. współczesnych teorii liczb rzeczywistych. Aporia nieskończoności doprowadziła do rozróżnienia *nieskończoności potencjalnej* (rozważamy jedynie obiekty ograniczone i klasy skończone, dopuszczamy jednak nieograniczone ich powiększanie) i *nieskończoności aktualnej* (nieskończoności *in toto*). Pod wpływem Arystotelesa uznano, że matematykom wystarcza ta pierwsza. Nieskończoność aktualna prawo obywatelstwa zyskała dopiero w czasach nowożytnych.

Intensywna praca umysłowa kilku stuleci, czerpiąca inspirację z różnych szkół filozoficznych (Jonowie, pitagorejczycy, eleaci, atomiści i inne), wewnętrznej dynamiki matematyki oraz problemów realnego świata, nagromadziła ogromną ilość materiału i doprowadziła do wieńczącej ją syntezy w postaci *Elementów* Euklidesa (sekcja 17). Dzieło to ustaliło obowiązujący do dzisiaj wzorzec *teorii naukowej*. Opisana w *Elementach* Euklidesa *geometria euklidesowa* zajmuje do dzisiaj wyróżnioną pozycję w matematyce. Jest to najważniejsza z naszych geometrii i źródło podstawowych intuicji.

Apogeum matematyka grecka osiągnęła w twórczości Archimedesa. Potem zaczął się jej uwiąd, na co duży wpływ miały zmiany polityczne. Śmierć Archimedesa z ręki rzymskiego żołnierza ma rangę symbolu: cywilizacja rzymska była wielka, ale obywała się bez matematyki. Matematyka grecka w porównaniu ze swoimi poprzedniczkami w Babilonii i Egipcie stanowiła całkowicie nową jakość, a jej oryginalne cechy charakterystyczne – pojęcia ogólne, definiowanie, dowodzenie, aksjomaty i postulaty, twierdzenia, teorie – zostały przyswojone przez całą naukę. Po upadku w starożytności przetrwała ona w cywilizacji arabskiej i odrodziła się w średniowiecznej Europie, nowy zaś okres rozkwitu nastąpił dopiero w czasach nowożytnych.

Odrodzenie matematyki w średniowiecznej Europie zaczęło się od przyswojenia dorobku greckiego i matematyka europejska była długo tylko jej kontynuacją (podobnie jak wcześniej arabska). Pojawił się wtedy *nominalizm* (trzecia wielka odpowiedź na problem istnienia obiektów matematycznych, odmawiająca tym obiektom realnego bytu), a istotnie nowe idee, w tym rachunek różniczkowy i całkowy Newtona i Leibniza pojawiły się dopiero w wieku XVII i od tej pory jest to już matematyka nowa, rozwijająca nowe treści. Pozostaje ona jednak zakorzeniona w matematyce greckiej i uznaje jej podstawowe kanony.

Bibliografia:

Aaboe A., *Matematyka w starożytności*, tłum. R. Ramer, PWN, Warszawa 1968.

Allman G.J., *Greek Geometry from Thales to Euclid*, HardPress Publishing, Los Angeles 2012.

Archimedes, *The Works of Archimedes*, red. T.L. Heath, Dover Publications, Mineola-New York 2002.

Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. 1–7, PWN, Warszawa 1990–1994.

I.G. Baszkamowa, *Grecja starożytna: Kraje hellenistyczne i imperium rzymskie*, [w:] *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, t.1, red. A.P. Juszkiewicz, tłum. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975.

Brawo B., Wipszycka E., *Historia starożytnych Greków*, t. 1–3, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1988.

Bunt L.N.H., Jones Ph.S., Bedient J.D., *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover Publications, New York 1988.

Cajori F., *A History of Mathematics*, The Macmillan Company, New York 1961.

Chase A.B., *The Rhind Mathematical Papyrus*, t. 1–2, Oberlin-Ohio 1927.

Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, t. 1–2, red. I. Grattan-Guinness, Routledge, London-New York 1994.

Courant R., Robbins H., *Co to jest matematyka*, PWN, Warszawa 1953.

Davis Ph.J., Hersh R., Marchisotto E.A., *Świat matematyki*, wyd. 2, tłum. R. Duda, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Dedekind R., *Gesammelte wissenschaftliche Werke*, t. 3, Braunschweig 1932.

Dedekind R., *Stetigkeit und die Irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872.

Disterkhuis E.J., *Archimedes*, Princeton University Press, Princeton N.J. 1987.

Duda R., *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów oświaty i kultury*, Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2019.

Duda R., *Kłopotliwy aksjomat wyboru*, [w:] *Oblicza filozofii w nauce*, red. P. Polak, J. Mączka, W.P. Grygiel, Copernicus Center Press, Kraków 2017.

Duda R., *Reviel Netz, William Noel, Kodeks Archimedesa. Tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata*, „Wiadomości Matematyczne” 2009, t. 45, s. 378–383.

Duda R., *Roots of mathematics*, „Organon” 2017, nr 49, s. 5–27.
Duda R., *Trzy tradycje*, [w:] *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, red. R. Murawski, J, Woleński, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2018, s. 11–22.
Duda R., *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, „Dydaktyka Matematyki” 1982, nr 1, s. 127–137.
Eliade M., *Sacrum a profanum. O istocie sfery religijnej*, Wydawnictwo Aletheia, Warszawa 2021.
Euklides, *The Thirteen Books of Euclid Elements*, transl. T.L. Heath, Dover Publications, New York 1956.
Fowler D.H., *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Clarendon Press, Oxford 1999.
Fritz K. von, *Die Archai in der griechischen Mathematik*, „Archiv für Begriffsgeschichte” 1955, nr 1, s. 13–103.
Fritz K. von, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, W. de Gruyter, Berlin-New York 1971.
Gajda J., *Pitagorejczycy*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1996.
Gajda J., *Żywoty Pitagorasa*, Epsilon, Wrocław 1993.
Garelli P., *Asyriologia. Odkrywanie Wschodu Starożytnego*, tłum. M. Korotaj, Warszawa 1998.
Gericke H., *Mathematik in Antike und Orient*, Springer-Verlag, Berlin 1984.
Gillings R.J., *Mathematics in the Time of Pharaohs*, MIT Press, Cambridge Massachusetts 1972.
Heath Th.L., *A History of Greek Mathematics*, t. 1–2, Clarendon Press, Oxford 1913.
Heath Th.L., *A Manual of Greek Mathematics*, Dover Publishing, Mineola New York 2003.
Heiberg J.L., Menge H., *Euclidis Opera Omnia*, t. 1–9, B.G. Teubneri, Leipzig 1883–1916.
Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, wyd. 13, B.G. Teubner, Stuttgart 1987.
Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia, t. 1: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych*, red. A.P. Juszkiewicz, tłum. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975.
Izard V., Pica P., Spelke E., Dehaene S., *Flexible intuition of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group*, „Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America” 2011, nr 108, s. 9782–9787.
Joseph G.G., *The Crest of the Peacock: non-European roots of mathematics*, Princeton University Press, Princeton 2011.
Katz V.J., *A History of Mathematics. An Introduction*, wyd. 2, Addison-Wesley, Reading Massachusetts 1998.
Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York 1972.
Knorr W.R., *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, Reidel, Dordrecht-Boston 1975.
Kopernik M., *De revolutionibus orbium coelestium*, Norymberga 1543..
Lakatos I., *Dowody i refutacje. Logika odkrycia naukowego*, tłum. M. Kozłowski, K. Lipszyc, Warszawa 2005.

Lasserre F., *The Birth of Mathematics in the Time of Plato*, American Research Council, London-New York 1964.

Leibniz G.W., *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, tłum. I. Dąmbska, PWN, Warszawa 1955 (*Biblioteka klasyków filozofii, Polska Akademia Nauk*, t. 17).

Lévêque P., *Świat grecki*, tłum. J. Olkiewicz, PWN, Warszawa 1973.

Manchip-White J., *Starożytny Egipt, jego kultura i historia*, Ossolineum, Wrocław 1976.

Máté A., *Árpád Szabó and Imre Lakatos. On the relations between history and philosophy of mathematics*, „Perspectives of Science" 2006, t. 14, nr 3, s. 282–301.

Maziarz E.A., Greenwood Th., *Greek Mathematical Philosophy*, New York 1968.

Monk J.D., *On the foundation of set theory*, „American Mathematical Monthly" 1970, nr 77, s. 703–711.

N. Copernicus, *Complete Works*, t. 2, PWN, Warsaw-Cracow 1978.

Netz R., Noel W., *Kodeks Archimedesa. Tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata*, tłum. A. Jeżewski, Magnum, Warszawa 2007.

Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, wyd. 2, Brown University Press, Providence-Rhode Island 1957.

Newman J.R., *The World of Mathematics*, t. 1, Allen and Unwin, London 1961.

Newton I., *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, tłum. J. Wawrzycki, Copernicus Center Press, Kraków 2011.

Newton I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687.

Pappus Alexandrinus, *La Collection Mathématique*, Desclée de Brouwer, Paris 1933.

Pedersen O., *Konflikt czy symbioza. Z dziejów relacji między nauką a teologią*, tłum. W. Skoczny, BIBLOS, Tarnów 1997.

Platon, *Dialogi*, tłum. W. Witwicki, CIL Polska, Warszawa 2000.

Popkin R.H., *Historia filozofii zachodniej*, Zysk i S-ka, Poznań 2008.

Proclus G.F., *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementarum librum commentarii*, B.G. Teubneri, Lipsiae 1873.

Proclus G.F., *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, tłum. G.R. Morrow, Princeton University Press, Princeton New York 1992.

Ptolemy's Almagest, tłum. G.J. Toomer, Princeton University Press, New Jersey 1998.

Reale G., *Historia filozofii starożytnej*, t. 1–5, tłum. E.I. Zieliński, Wydawnictwo KUL, Lublin 1999–2005.

Russell B., *Dzieje filozofii Zachodu i jej związki z rzeczywistością polityczno-społeczną od czasów najdawniejszych do dnia dzisiejszego*, tłum. T. Baszniak, A. Lipszyc i M. Szczubiałka, Fundacja Aletheia, Warszawa 2000.

Russo L., *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna*, tłum. I. Kania, Universitas, Kraków 2005.

Snow C.P., *Dwie kultury*, tłum. T. Baszniak, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.

Spinoza B., *Ethica ordine geometrico demonstrate*, 1677.

Struik D.J., *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*, PWN, Warszawa 1960.

Szabó Á., *Anfänge der griechischen Mathematik*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1978.

Szabó Á., *Anfänge des euklidischen Axiomensystem*, „Archive for History of Exact Sciences" 1960, t. 1, nr 1, s. 97–106.

Szabó Á., *Die Entfaltung der griechischen Mathematik*, Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.

Szabó Á., *Die frühgriechische Proportionenlehre im Spiegel ihrer Terminologie*, „Archive for History of Exact Sciences” 1965, t. 2, nr 3, s. 197–270.

Szabó Á., *Die Philosophie der Eleaten und die Mathematik der Griechen*, „La Parola del Passato. Rivista di Studi Antichi” 1988, nr 48, s. 420–445,

Szabó Á., *O prewraszczenii matiematiki w deduktiwnuju nauku i naczale jejo obosnowania*, „Istoriko-matiematiczeskije issledowania” 1959, nr 12, s. 321–392.

Tatarkiewicz W., *Historia filozofii*, t. 1–3, PWN, Warszawa 1958.

Taton R., *Histoire générale des sciences*, t. 1: *La science antique et médiévale*, Presses universitaires de France, Paris 1957.

Thom R., *Matematyka a rozumienie*, „Wiadomości Matematyczne” 1981, t. 23, nr 2, s. 205–212.

Thomas I., *Greek Mathematical Works*, t. 1: *Thales to Euclid*, Harvard University Press, Cambridge 1939.

Turnbull H.W., *The Great Mathematicians*, Barnes & Noble Books, New York 1993.

Vademecum historyka starożytnej Grecji i Rzymu, t. 1–2, red. E. Wipszycka, PWN, Warszawa 2001.

Waerden B.L. van der, *Erwachende Wissenschaft*, t. 2: *Die Anfänge der Astronomie*, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart 1968.

Waerden B.L. van der, *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, Babylonische und Griechische Mathematik*, wyd. 2, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart 1966.

Waerden B.L. van der, *Zeno und die Grundlagen Krise der griechischen Mathematik*, „Mathematische Annalen” 1940, nr 117, s. 141-161.

Wagon S., Tomkowicz G., *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

Whitehead A.N., *Nauka i świat nowożytny*, tłum. M. Kozłowski, M. Pieńkowski OP, Znak, Kraków 1987.

Wußing H., *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, t. 1–2, Springer, Berlin 2008.

Ziółkowski A., *Historia Powszechna. Starożytność*, PWN, Warszawa 2009.